

**Optimierung von Filtern,
insbesondere von Wellendigitalfiltern
mit verringerter Zahl an Multiplizierern**

**Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum**

**von
Klaus-Albert Owenier
Wuppertal**

Bochum 1977

**Optimierung von Filtern,
insbesondere von Wellendigitalfiltern
mit verringerter Zahl an Multiplizierern**

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
der Abteilung für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum



von
Klaus-Albert Owenier
Wuppertal

Bochum 1977



Dissertation eingereicht am: 22. 6. 1977

Tag der mündlichen Prüfung: 20. 7. 1977

Referent:

Prof. Dr. A. Fettweis

Korreferent:

Prof. Dr. R. Pregla

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
1. <u>Einleitung</u>	1
2. <u>Approximationsverfahren</u>	5
2.1 <u>Transfermatrix von Wellendigitalfiltern</u>	5
2.2 <u>Tschebyscheff-Approximation der Dämpfung</u> <u>im Durchlaßbereich</u>	10
2.2.1 Beschreibung des Approximationsproblems	10
2.2.2 Eigenschaften linearer Tschebyscheff- Approximationen	13
2.2.3 Sonderfall der Dämpfungsapproximation	16
2.2.4 Lösung des Problems zur Approximation der Dämpfung Null	21
2.2.4.1 Allgemeines Verfahren	21
2.2.4.2 Rekursive Formeln für Tiefpässe	26
2.2.4.3 Rekursive Formeln für Hochpässe	32
2.2.4.4 Rekursive Formeln für Bandpässe	37
2.2.4.5 Rekursive Formeln für Bandsperren	43
2.2.4.6 Produktdarstellung	50
2.2.4.7 Numerische Eigenschaften und Beispiele	53
2.3 <u>Tschebyscheff-Approximation im Durchlaß- und Sperrbereich</u>	57
2.3.1 Beschreibung des Approximationsproblems	57
2.3.2 Näherungsverfahren zur Approximation der Dämpfung Null im Durchlaßbereich und der Dämpfung Unendlich im Sperrbereich bei Tiefpaßfiltern	58
2.3.3 Ergebnisse und Beispiel	62

	Seite
3. <u>Filterberechnungsverfahren</u>	64
3.1 <u>Berechnung des Polynoms g</u>	64
3.2 <u>Berechnung der Bauelemente</u>	66
3.3 <u>Addition von Polynomen in Produktform</u>	69
4. <u>Optimierungsverfahren</u>	71
4.1 <u>Allgemeines Verfahren</u>	71
4.2 <u>Abzweigschaltungen mit entkoppelnden</u> <u>Einheitselementen</u>	74
4.2.1 <u>Grundlagen der Optimierung</u>	74
4.2.2 <u>Empfindlichkeitsberechnung</u>	82
4.3 <u>Allgemeine Filterstrukturen</u>	86
4.3.1 <u>Grundlagen der Optimierung</u>	86
4.3.2 <u>Empfindlichkeitsberechnung</u>	89
4.4 <u>Approximationsproblem und Optimierungs-</u> <u>Algorithmus</u>	96
4.5 <u>Ergebnisse der numerischen Optimierung</u>	105
4.5.1 <u>Filter mit entkoppelnden Einheitselementen</u>	105
4.5.2 <u>Filter allgemeiner Struktur</u>	114
4.5.3 <u>Tiefpaß-Bandpaß-Transformation</u>	118
5. <u>Zusammenfassung</u>	120
<u>Literaturverzeichnis</u>	123
<u>Anhang A1- A2</u>	131

1. Einleitung

Die großen Fortschritte auf dem Gebiet der digitalen Schaltungstechnik haben in den letzten Jahren dazu geführt, daß neben den bekannten Filterarten - klassische LC-Filter, Einheitselementfilter (UE-Filter), Quarzfilter, mechanische Filter und aktive Filter - Digitalfilter zunehmend an Bedeutung für die Signalverarbeitung und für die Nachrichtenübertragung gewonnen haben. Ein Digitalfilter besteht im wesentlichen aus digitalen Bausteinen wie Addierern, Multiplizierern und Speichern (Verzögerungsglieder). Es läßt sich ganz allgemein durch den Algorithmus beschreiben, mit dem aus einer Eingangsfolge $\{x(nT)\}$ die Ausgangsfolge $\{y(nT)\}$ berechnet wird. Eine solche Eingangsfolge entsteht z. B. durch Abtastung eines analogen Signals $x(t)$ mit der Abtastfrequenz $1/T$ und anschließender Quantisierung mit Hilfe eines A/D-Wandlers. Wie bei Analogfiltern läßt sich auch bei Digitalfiltern das ideale Übertragungsverhalten durch eine entsprechende Übertragungsfunktion beschreiben. Digitalfilter erfordern keinen Abgleich, sind temperatur- und zeitkonstant, erlauben bei entsprechendem Aufwand an digitalen Bausteinen die Realisierung von Übertragungsfunktionen mit praktisch beliebiger Genauigkeit und eine dementsprechend präzise Signalverarbeitung. Im Gegensatz zu Analogfiltern lassen sich Digitalfilter mehrfach zeitmultiplex ausnutzen. Diesen Vorteilen stehen als Nachteile der relativ hohe Aufwand für Abtastung und Quantisierung, die große Zahl von digitalen Bausteinen, die durch die Rechengeschwindigkeit der Bausteine bestimmte begrenzte Taktfrequenz und das durch die endliche Signalwortlänge bedingte Rauschen gegenüber. Außerdem ist durch die Arithmetik die Aussteuerung begrenzt; diese Begrenzung und auch die endliche Wortlänge der Signalgrößen können eventuell zu Stabilitätsschwierig-

keiten führen (Grenzzyklusschwingungen). Die gegebenen Anforderungen an ein Digitalfilter bestimmen die Auswahl einer geeigneten Filterstruktur und Arithmetik. Die Signalwortlänge wird durch das gewünschte Signalrauschverhältnis bestimmt. Aus wirtschaftlichen Gründen und im Hinblick auf die maximal erreichbare Taktfrequenz ist man besonders daran interessiert, außer der Zahl der Speicher, die Zahl der Multiplizierer bzw. den Multipliziereraufwand (Koeffizientenwortlänge bzw. Zahl der Addierer) gering zu halten [63-64,66-70,72].

Neben den konventionellen Digitalfiltern, die Strukturen verwenden, bei denen sich die Werte der Multiplizierer-Koeffizienten sofort aus der Übertragungsfunktion bestimmen lassen [1-6], sind seit einiger Zeit neuartige Filterstrukturen entwickelt worden, die sogenannten Wellendigitalfilter, die sich durch eine Reihe von besonderen Vorteilen auszeichnen [7-23]. Die Strukturen dieser Wellendigitalfilter ergeben sich durch Analogie mit klassischen verlustfreien Filtern; hierzu werden Wellengrößen, wie sie ähnlich aus der Streuparametertheorie bekannt sind, benutzt. Das klassische Filter, von dem das entsprechende Wellendigitalfilter abgeleitet wird, nennt man Referenzfilter. Es ist aus der Theorie bekannt, daß eine Reihe von nützlichen Eigenschaften des Referenzfilters - wie geringe Empfindlichkeit gegenüber Bauelementetoleranzen, Stabilität, Reziprozität und Verlustfreiheit - sich unmittelbar auf das Digitalfilter übertragen lassen. Bekanntlich ist es möglich, Reaktanzfilter mit resistiven Abschlußwiderständen zu entwerfen, die eine sehr geringe Empfindlichkeit des Dämpfungsverlaufs gegenüber Variationen der Bauelemente aufweisen. Diese geringe Empfindlichkeit wird im Sperrbe-

reich durch Verwendung von Abzweigstrukturen und im Durchlaßbereich durch eine möglichst geringe Dämpfung erzielt. Aufgrund des einfachen Zusammenhangs zwischen den Bauelementwerten des Referenzfilters und den Multiplizierer-Koeffizienten des zugehörigen Wellendigitalfilters ergibt sich dann eine entsprechend geringe Empfindlichkeit des Digitalfilters. Diese günstigen Empfindlichkeitseigenschaften, in Verbindung mit einer bestehenden Beziehung zwischen der Empfindlichkeit gegenüber Variationen der Multiplizierer-Koeffizienten und dem Rundungsrauschen am Ausgang von Wellendigitalfiltern, sind zum Beweis eines entsprechend niedrigen Rundungsrauschens bei Wellendigitalfiltern ausgenutzt worden |11,12,16,18|.

Man kann nun zeigen, daß sich die angegebenen Empfindlichkeitseigenschaften dazu benutzen lassen, die Zahl der Multiplizierer bzw. den Multipliziereraufwand gegenüber dem normalen Entwurfsverfahren zu verringern. Die hierdurch gegebenen Möglichkeiten sind nicht auf Wellendigitalfilter mit bestimmtem Grad der Übertragungsfunktion oder auf spezielle Strukturen beschränkt. Das Verfahren erfordert die Entwicklung von speziellen für Digitalrechner geeigneten Approximations- und Optimierungstechniken bei vorgegebenen Dämpfungsanforderungen. Von besonderer Bedeutung sind Filter mit Tschebyscheff-Approximation der Dämpfung Null im Durchlaßbereich. Hierfür werden neuartige Rekursionsformeln für Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß- und Bandsperrfilter entwickelt, die sich besonders leicht programmieren lassen. Diese Rekursionsformeln sind nicht nur für klassische LC-Filter, sondern auch gleichzeitig für Einheitselementfilter gültig. Nach erfolgter Approximation lassen sich nach dem bekannten Verfahren der Faktorisie-

rung der Betriebskettenmatrix $[40,47]$ bzw. durch Entwicklung der Betriebseingangsimpedanz die Bauelemente des Referenzfilters berechnen. Die anschließende Optimierung der Bauelementewerte bzw. der Multiplizierer-Koeffizienten ist stark nichtlinear; daraus ergeben sich besondere Probleme bei der numerischen Durchführung und Programmierung. Wegen der Vielzahl der möglichen Strukturen von Wellendigitalfiltern wurde ein systematischer Aufbau aus Elementarzellen zugrunde gelegt.

Die Approximation, Berechnung und Optimierung von Filtern ist durch einen beträchtlichen Rechenaufwand gekennzeichnet, der insbesondere bei Filtern höheren Grades sowohl aus Genauigkeitsgründen als auch aus Rechenzeitgründen leicht untragbar werden kann. Lassen sich z. B. bei hohen Filteranforderungen die dicht nebeneinander liegenden Polynomnullstellen durch die Koeffizienten der Polynome nicht mehr hinreichend genau darstellen, so kann man die auftretenden Polynome durch ihre Nullstellen beschreiben $[79,45]$ (Produktdarstellung). Dies ergibt dann wegen des anzuwendenden iterativen Verfahrens zur Polynomaddition eine beträchtliche Erhöhung der Rechenzeit. Die Entwicklung der Approximations- und Optimierungsverfahren erfolgte daher im Hinblick auf möglichst geringe Rechenzeiten bei ausreichender Genauigkeit. Dies führte u. a. zur Ableitung eines neuen sehr effektiven Verfahrens zur Berechnung der Empfindlichkeit von Wellendigitalfiltern gegenüber Änderungen der Multiplizierer-Koeffizienten.

2. Approximationsverfahren

2.1 Transfermatrix von Wellendigitalfiltern

Da sich die Strukturen von Wellendigitalfiltern durch eine unmittelbare Analogie mit klassischen verlustfreien Filtern (z. B. LC-Filter) und Einheitselementfiltern ergeben [7-23], lassen sich ideale Wellendigitalfilter durch entsprechende Zweitormatrizen, z. B. durch die Transfermatrix (Betriebskettenmatrix) beschreiben.

Die Leistungswellen eines Zweitores N (Bild 2.1) sind definiert gemäß

$$A_i = (U_i + R_i I_i) / 2\sqrt{R_i} \quad , \quad B_i = (U_i - R_i I_i) / 2\sqrt{R_i} \quad . \quad (2.1)$$

Dabei ist A_i die einfallende Welle, B_i die reflektierte Welle und R_i der Torwiderstand am Tor i ($i=1,2$).

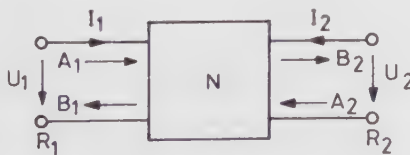


Bild 2.1 Zweitor N

Die Transfermatrix $\underline{T}$ ist dann definiert durch

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 \end{pmatrix} = \underline{T} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.2)$$

Für ein klassisches verlustfreies Zweitor sei die kanonische Form der Transfermatrix gegeben durch [40]

$$\underline{T} = \frac{1}{f} \begin{pmatrix} \sigma g_{**} & h \\ \sigma h_{**} & g \end{pmatrix} \quad . \quad (2.3)$$

Hierbei gilt für die sogenannten kanonischen Polynome $f=f(p)$, $g=g(p)$ und $h=h(p)$:

1. f , g und h sind reelle Polynome der komplexen Frequenz p .
2. g ist ein Hurwitzpolynom.
3. Der zur höchsten Potenz von p gehörende Koeffizient von f ist auf +1 normiert.
4. σ ist eine Konstante, die entweder +1 oder -1 ist.
5. f , g und h sind durch folgende Beziehung miteinander verknüpft

$$gg_{\star} = hh_{\star} + ff_{\star} \quad . \quad (2.4)$$

Diese Definition stimmt in der Notation bis auf eine geringfügige Änderung mit der von Belevitch [30] benutzten überein. Das hier benutzte Polynom f entspricht $\sigma f_{\star}$ in [30]. Die Bezeichnung $F_{\star}$ bedeutet dabei die Hurwitzkonjugierte der jeweiligen Funktion F . Es gilt $F_{\star} = F^{\star}(-p^{\star})$. Da in diesem Fall alle Funktionen reell sind, bedeutet dies einfach den Übergang von p zu $-p$, d. h., $F_{\star}(p) = F(-p)$ (Schwarz'sches Spiegelungsprinzip). Ist das Zweitor N verlustfrei und reziprok (Reaktanzzweitor), dann ist das Polynom f entweder gerade oder ungerade und es gilt [30]

$$\sigma = \frac{f_{\star}}{f} = \begin{cases} +1 & \text{für gerades } f \\ -1 & \text{für ungerades } f \end{cases} \quad . \quad (2.5)$$

Die sogenannte charakteristische Funktion K ist definiert durch

$$K = h/f \quad . \quad (2.6)$$

Für symmetrische Reaktanzzweitore ist K ungerade, für antisymmetrische Reaktanzzweitore gerade [30]. Im symmetrischen Fall ist entweder f gerade und h ungerade oder f ungerade und h gerade;

im antimetrischen Fall müssen f und h beide gerade sein, da anderenfalls h und f den Faktor p enthalten würden und wegen (2.4) auch g , dies ist jedoch nicht möglich, da g als Hurwitzpolynom nur Nullstellen in der offenen rechten Halbebene haben kann.

Bei der Herleitung von Wellendigitalfiltern werden im Gegensatz zu den angegebenen Leistungswellen (2.1) Spannungswellen benutzt [7,13]

$$A_i^u = U_i + R_i I_i, \quad B_i^u = U_i - R_i I_i. \quad (2.7)$$

Definiert man entsprechend (2.2) eine Transfermatrix für Spannungswellen, so ergibt sich wegen (2.1) und (2.7) folgender Zusammenhang

$$\underline{T}^u = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \underline{T}, \quad (2.8)$$

d. h., beide Matrizen unterscheiden sich nur durch einen frequenzunabhängigen Faktor. Die oben angegebenen Eigenschaften der Transfermatrix klassischer verlustfreier Zweitore gelten also auch prinzipiell für Wellendigitalfilter. Die komplexe Frequenz p ist jedoch durch die äquivalente komplexe Frequenz

$$\psi = \tanh(pT/2) \quad (2.9)$$

zu ersetzen. Für $p=j\omega$ kann man dann schreiben

$$\varphi = \tan(\omega T/2). \quad (2.10)$$

Hierin ist $1/T$ die verwendete Abtastfrequenz. Die Beziehung (2.4) wird zu

$$gg_* = hh_* + \frac{R_1}{R_2} ff_*, \quad (2.11)$$

worin jetzt f , g , h die Polynome der über Spannungswellen definierten Transfermatrix sind.

Ein Einheitselement (Bild 2.2) ist ein reziprokes Zweitor mit der für $R_1=R_2=R_0$ gegebenen Transfermatrix [41]

$$\underline{T} = \frac{1}{\sqrt{1-\Psi^2}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{R/R_0 + R_0/R}{2} \Psi & \frac{R/R_0 - R_0/R}{2} \Psi \\ - \frac{R/R_0 - R_0/R}{2} \Psi & 1 + \frac{R/R_0 + R_0/R}{2} \Psi \end{pmatrix} \quad (2.12)$$



Bild 2.2 Einheitselement

Hierbei ist R die charakteristische Impedanz des Einheitselements und $T/2$ die Verzögerungszeit.

Die Transfermatrix $\underline{T}(\Psi)$ eines Einheitselementfilters [40-41] hat alle für klassische verlustfreie Zweitore besprochene Eigenschaften (p ist durch Ψ zu ersetzen), bis auf die Tatsache, daß $f=f(\Psi)$ kein Polynom sein muß, sondern die Form

$$f = (1-\Psi^2)^{k/2} f_0 \quad (2.13)$$

haben kann. Hierbei ist k eine nichtnegative ganze Zahl und $f_0=f_0(\Psi)$ ein reelles Polynom, dessen zur höchsten Potenz von Ψ gehörender Koeffizient auf +1 normiert ist. Es ist zweckmäßig, den Faktor $(1-\Psi^2)^{1/2}$ als eine gerade Funktion in Ψ zu betrachten, d. h.,

$$\left[(1-\Psi^2)^{1/2} \right]_* = (1-\Psi^2)^{1/2}, \quad (2.14)$$

da dann mit (2.5) alle für symmetrische bzw. antisymmetrische Filter gemachten Aussagen gültig bleiben. Unter Berücksichtigung von

(2.8) und (2.13) läßt sich nun zusammenfassend feststellen, daß sich jedes ideale Wellendigitalfilter prinzipiell durch eine Transfermatrix mit den Eigenschaften der Transfermatrix eines Einheitselementfilters beschreiben läßt. Bei realen Digitalfiltern entstehen durch die endliche Signalwortlänge natürlich rauschartige Fehler, daher läßt sich ein Wellendigitalfilter nur in erster Näherung durch eine solche Transfermatrix charakterisieren. Für die Zwecke der Approximation bzw. Optimierung von Dämpfungsverläufen soll jedoch angenommen werden, daß die Signalwortlänge hinreichend groß ist, so daß man von einem idealen Wellendigitalfilter ausgehen kann.

Neben der hier benutzten Frequenzvariablen Ψ findet man in der Literatur über Digitalfilter oft neben p auch die Verwendung von

$$z = e^{pT} \quad . \quad (2.15)$$

Es gelten folgende Zusammenhänge (bilineare Transformationen)

$$\Psi = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{bzw.} \quad z = \frac{1+\Psi}{1-\Psi} \quad . \quad (2.16a,b)$$

Bei Verwendung der komplexen Frequenz Ψ ergeben sich häufig einfachere Darstellungen, insbesondere ist bei Wellendigitalfiltern nur eine einmalige Transformation eines gegebenen Toleranzschemas in den Ψ -Frequenzbereich nötig. In bestimmten Fällen lassen sich aus der klassischen Filtertheorie bekannte Lösungen von Approximationsproblemen unmittelbar verwenden [44].

2.2 Tschebyscheff-Approximation der Dämpfung im Durchlaßbereich

2.2.1 Beschreibung des Approximationsproblems

Da sich die Transfermatrix eines idealen Wellendigitalfilters nur durch einen frequenzunabhängigen Faktor von der Transfermatrix eines Einheitselementfilters unterscheidet (2.8), kann man jedes für Wellendigitalfilter gegebene Dämpfungsapproximationsproblem als ein Approximationsproblem für Einheitselementfilter auffassen. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird von nun an in den Kapiteln über Filterapproximation und Filterberechnung anstelle von Ψ der Buchstabe p verwendet. Außerdem sollen nur die für die Praxis besonders wichtigen reziproken Filter betrachtet werden. Die Betriebsdämpfung eines nach Bild 2.3 beschalteten verlustfreien und reziproken Zweitorts N läßt sich mit Hilfe der charakteristischen Funktion K angeben [30,42]. Mit (2.6) und (2.13) gilt

$$K = \frac{h}{(1-p^2)^{k/2} f_0} \quad (2.17)$$

Für $p=j\omega$ ergibt sich die Betriebsdämpfung A in dB zu

$$A = 10 \log \left(\frac{R_2 |E|^2}{4 R_1 |U|^2} \right) \geq 0 \quad (2.18a)$$

$$A = 10 \log(1 + K K_*) = 10 \log |1 + K(j\omega) K(-j\omega)| \quad (2.18b)$$

$$A = 10 \log(1 + |K|^2) \quad (2.18c)$$

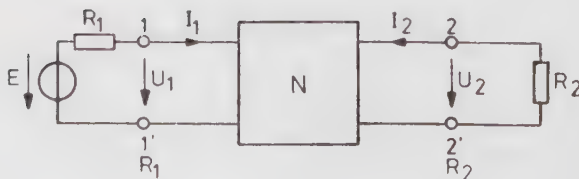


Bild 2.3 Betriebsschaltung des Zweitorts N

Die Betriebsdämpfung $A(\omega)$ ist nach (2.18b) eine gerade Funktion in ω . Die Dämpfungspole und Dämpfungsnullstellen werden durch die Pole bzw. Nullstellen der charakteristischen Funktion auf der $j\omega$ -Achse bestimmt. Die Lage der Nullstellen von h und f_0 ist nur durch die in Kap. 2.1 angegebenen Eigenschaften dieser Polynome beschränkt, d. h., die Nullstellen der Polynome müssen entweder reell oder paarweise konjugiert komplex sein und das f_0 -Polynom noch darüber hinaus gerade oder ungerade in p sein.

Jeder vorgegebene Dämpfungsverlauf $A_0(\omega)$ kann mit der Beziehung

$$C = |K|^2 \quad (2.19)$$

und (2.18c) eindeutig in einen entsprechenden Verlauf $C_0(\omega^2)$ umgerechnet werden. Die dazugehörige Funktion $K_0(j\omega)$ ist jedoch nur bis auf einen Faktor $e^{j\delta(\omega)}$, δ reell bestimmt; es gilt

$$K_0 = |K_0| e^{j\delta} \quad (2.20)$$

Hierbei kann man δ gegebenenfalls später noch festlegen. Setzt man bei der Approximation eines Dämpfungsverlaufes im Durchlaßbereich voraus, daß die Pole von K fest vorgegeben sind, so läßt sich das Approximationsproblem folgendermaßen formulieren: Man approximiere für $p=j\omega$ eine Zielfunktion $K_0(p)$ im Tschebyscheff'schen Sinne in einem Bereich der ω -Achse durch

$$K(p) = \frac{\prod_{i=0}^{gh} A_i p^i}{(1-p^2)^{k/2} \prod_{i=1}^{gf_0} (p-p_i)} \quad (2.21)$$

Hierbei ist gh der Grad des h -Polynoms und gf_0 der Grad des f_0 -Polynoms. Alle A_i sind reell und für das f_0 -Polynom gelten bezüglich der Lage der Nullstellen die oben angegebenen Einschränkungen. Definiert man als Grad von f

$$gf = k + gf_0, \quad (2.22)$$

so gilt für den Grad von $K(p)$

$$gK = \max(gf, gh). \quad (2.23)$$

Ein Dämpfungspol der Ordnung m im Unendlichen ergibt sich durch den Gradunterschied

$$m = gh - gf. \quad (2.24)$$

Häufig ist zur Vermeidung von Rechenungenauigkeiten bei der Durchführung der Approximation eine Normierung der Frequenz in (2.21) angebracht, so daß anstelle von $(1-p^2)^{k/2}$ ein Ausdruck $(\sigma_\infty^2 - p^2)^{k/2}$ auftritt. Bezüglich der Dämpfung (2.18c) sind Faktoren im Nenner (2.21) der Form $\pm(p-p_i)$, $\pm(p_i^2 - p^2)^{1/2}$ und $\pm(p^2 - p_i^2)^{1/2}$ völlig gleichwertig, da die p_i entweder reell oder paarweise konjugiert komplex sein müssen. Außerdem kann man wegen (2.18b) noch die Lage der Dämpfungspole auf die abgeschlossene rechte p -Halbebene begrenzen. Insgesamt ergibt sich folgender für die Entwicklung eines allgemeinen Approximationsverfahrens besonders günstige Ausdruck der charakteristischen Funktion

$$K(p) = \frac{\prod_{i=0}^{gK} A_i p^i}{\prod_{i=1}^{gf} \sqrt{p^2 - p_i^2}} \quad (2.25)$$

$$\text{mit } \operatorname{Re}\{p_i\} \geq 0 \quad \forall i.$$

Den Nenner f kann man hierbei als gerade oder ungerade Funktion in p auffassen.

Es gilt: f^2 ist ein reelles gerades Polynom der Frequenz p . Die Darstellung von $K(p)$ in (2.25) vermeidet für die wichtigsten Dämpfungspole bei reellen bzw. imaginären Frequenzen p eine komplexe Zahlendarstellung. Man beachte aber, daß ein Filter mit $K(p)$ nach (2.25) im Gegensatz zu (2.21) nicht für beliebige p_i als Einheitselementfilter realisierbar ist. Diese Tatsache hat jedoch für die weitere Behandlung des Approximationsproblems keine Bedeutung. Wie aus (2.21) bzw. (2.25) für feste p_i hervorgeht, handelt es sich bei dem hier vorgestellten Approximationsproblem um eine sogenannte lineare Tschebyscheff-Approximation [24-27].

2.2.2 Eigenschaften linearer Tschebyscheff-Approximationen

Allgemeine Formulierung des Problems der T.-Approximation

[27]: Sei B ein kompakter metrischer Raum und $C(B)$ der Vektorraum der auf B stetigen reell- oder komplexwertigen Funktionen. $C(B)$ sei versehen mit der Maximum-Norm

$$\|g\| = \max_{x \in B} |g(x)|, \quad g \in C(B). \quad (2.26)$$

Vorgegeben sei eine nichtleere Teilmenge W von $C(B)$ und eine feste Funktion $f \in C(B)$. Dann existiert die sogenannte Minimalabweichung

$$\rho = \inf_{w \in W} \|w - f\|, \quad (2.27)$$

und es gilt $\rho(f, W) \geq 0$. Das Tschebyscheff'sche Approximationsproblem besteht nun darin, eine Funktion $\hat{w} \in W$ anzugeben, für die gilt

$$\|\hat{w} - f\| = \rho(f, W). \quad (2.28)$$

Jedes $\hat{w} \in W$ mit (2.28) heißt Minimallösung in W bezüglich f . In

vielen Anwendungen ist W das Bild einer Parametermenge A , die eine nichtleere Teilmenge des reellen oder komplexen n -dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist, unter einer Abbildung $F: A \rightarrow C(B)$, die jedem $a \in A$ genau eine Funktion $F(a) = \varepsilon \in C(B)$ zuordnet. In diesem Fall ist also

$$W = F(A) = \{F(a) | a \in A\} . \quad (2.29)$$

Der kompakte metrische Raum B ist meistens eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge eines $\mathbb{R}^S$ oder $\mathbb{C}^S$, z. B. ein endliches, abgeschlossenes, reelles Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $\alpha < \beta$ oder eine endliche Punktmenge (diskrete Approximation).

Existenz von Minimallösungen [27]: $C(B)$ ist ein metrischer Raum, wenn man die Metrik durch $\rho(g, h) = \|g - h\|$, $g, h \in C(B)$ definiert. Ist W eine kompakte Teilmenge von $C(B)$, so existiert eine Minimallösung $\hat{w} \in W$.

Lineare Approximation [27]: In diesem Fall ist $A = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Seien $w_1, \dots, w_n \in C(B)$ fest vorgegebene linear unabhängige Funktionen. Dann definieren wir w nach (2.29), wobei

$$F(a, x) = \sum_{j=1}^n a_j w_j(x) \quad , \quad x \in B, \quad (2.30)$$

ist. Hierin enthalten ist die sogenannte Polynomapproximation, bei der $B = [\alpha, \beta]$ mit $\alpha < \beta$ und $w_j(x) = x^{j-1}$ ist für $j=1, \dots, n$.

Eindeutigkeit von Minimallösungen bei linearer T.-Approximation [27, 25]: Es sei V ein linearer r -dimensionaler Unterraum von $C(B)$, der von den Funktionen $v_1, \dots, v_r \in C(B)$ aufgespannt werde.

V genügt der Haar'schen Bedingung auf B, wenn jede nicht identisch verschwindende Funktion $v \in V$ höchstens $r-1$ Nullstellen auf B besitzt. V erfülle die Haar'sche Bedingung, dann gibt es genau eine Minimallösung bezüglich V.

Charakterisierung von Minimallösungen bei linearer T.-Approximation (Alternantensatz) [25,27]: Es sei $C[\alpha, \beta]$ der Raum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[\alpha, \beta]$ und V ein linearer r -dimensionaler Unterraum von $C[\alpha, \beta]$, der die Haar'sche Bedingung erfüllt. Es sei $\hat{v}$ die Minimallösung für f bezüglich V. Dann gibt es $r+1$ Punkte x_μ , die wir uns in der Reihenfolge angeordnet denken

$$\alpha \leq x_1 < x_2 < \dots < x_r < x_{r+1} \leq \beta, \quad (2.31)$$

so daß für die Fehlerfunktion $e(x) = f(x) - \hat{v}(x)$ die folgenden Beziehungen gelten:

$$|e(x_\mu)| = \|f - \hat{v}\| \quad (2.32)$$

und
$$e(x_v) + e(x_{v+1}) = 0$$

für $\mu = 1, 2, \dots, r+1; \quad v = 1, 2, \dots, r.$

Die hierdurch charakterisierte Minimallösung ist eindeutig.

Invarianzen bei linearer T.-Approximation [25,48]: Häufig übertragen sich spezielle Eigenschaften der Funktion f auf ihre Minimallösungen. Bei der Approximation einer geraden bzw. ungeraden Funktion $f(x)$ einer reellen Variablen in einem zum Nullpunkt symmetrischen Intervall durch Polynome vom Grad kleiner oder gleich n ist die Minimallösung ebenfalls eine gerade bzw. ungerade Funktion. Es gilt [25]: Es sei T eine eindeutige stetige Abbildung von B in sich und A ein beschränkter Operator von $C(B)$ in sich mit $\|A\| \leq 1$, d. h., $\|Af\| \leq \|f\|$. Es gelte:

1. $A f(Tx) = f(x)$ (2.33)
2. Aus $h(x) \in V$ folge $A h(Tx) \in V$

Dann gibt es eine Minimallösung $\hat{v}$ von f bezüglich V mit der Eigenschaft

$$A \hat{v}(Tx) = \hat{v}(x) \quad . \quad (2.34)$$

2.2.3 Sonderfall der Dämpfungsapproximation

Das in Kap. 2.2.1 definierte Tschebyscheff-Approximationsproblem für die Dämpfung im Durchlaßbereich umfaßt neben den Einheitselementfiltern auch die formal als Spezialfall darin enthaltenen klassischen verlustfreien Filter. Da die Dämpfung $A(\omega)$ eine gerade Funktion in ω ist, besteht der kompakte metrische Raum B je nach Filtertyp (z. B. Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß- und Bandsperrfilter) aus einem oder mehreren symmetrisch zum Nullpunkt der ω -Achse liegenden abgeschlossenen Intervallen

$$-\infty < [-\alpha_d, -\beta_d], [-\alpha_{d-1}, -\beta_{d-1}], \dots, [-\alpha_1, \beta_1, \alpha_1], \dots, [\beta_{d-1}, \alpha_{d-1}], [\beta_d, \alpha_d] < \infty \quad (2.35)$$

Mit (2.30) folgt aus (2.25) folgende Darstellung für W

$$K(A, p) = \prod_{j=1}^{gK+1} A_{j-1} \frac{p^{j-1}}{\prod_{i=1}^{gf} \sqrt{p^2 - p_i^2}} \quad , \quad p = j\omega, \omega \in B. \quad (2.36)$$

mit $n=gK+1$, $a_j=A_{j-1}$, $F(a, x)=K(A, p)$, $A \in \mathbb{R}^n$ und

$$w_j = \frac{p^{j-1}}{\prod_{i=1}^{gf} \sqrt{p^2 - p_i^2}} \quad . \quad (2.37)$$

Die Einschränkung von B auf das offene Intervall $(-\infty, \infty)$ kann

man fallen lassen, da man in $[-\infty, -a]$ und $[a, \infty]$ stetige Funktionen mit Hilfe einer geeigneten Variablentransformation in stetige Funktionen in $[-\alpha, -\beta]$ und $[\beta, \alpha]$ überführen kann. Für

$$\frac{p_i}{j} \notin B, \quad i = 1, \dots, gf \quad (2.38)$$

sind $w_1, \dots, w_n \in C(B)$. Dies gilt auch dann noch, wenn B um den Punkt ∞ erweitert wird (siehe unten) und außerdem die zusätzliche Voraussetzung

$$gf = gK \quad (2.39)$$

gemacht wird. Die Bedingungen (2.38) und (2.39) sind bei der Filterapproximation im Durchlaßbereich trivialerweise erfüllt, da im Durchlaßbereich keine Dämpfungspole auftreten sollen. Die Funktionen w_j sind außerdem offensichtlich linear unabhängig. Gilt weiterhin für die Zielfunktion $K_0 \in C(B)$ und

$$\|K_0 - K\| = \max_{\omega \in B} |K_0(p) - K(A, p)|, \quad p = j\omega, \quad (2.40)$$

so handelt es sich bei dem gegebenen Approximationsproblem um eine lineare Tschebyscheff-Approximation, bei der die Existenz einer Minimallösung $\hat{K}$ garantiert ist. Die Eindeutigkeit der Minimallösung folgt aus der Haar'schen Bedingung, da jede Funktion $w_j \in V$, $j=1, \dots, r$ (2.37) wegen der Gültigkeit von (2.23) ähnlich wie eine rationale Funktion für alle p höchstens $r-1=gK$ Nullstellen haben kann.

Da die Funktionen w_j komplexwertig sein können und außerdem B nicht aus einem einzigen abgeschlossenen Intervall $[\alpha, \beta]$ zu bestehen braucht, läßt sich der Alternantensatz zur Charakterisierung der Minimallösung zunächst nicht verwenden.

Für $K_0 \neq 0$ ist noch zu untersuchen, wie der in (2.20) vorhandene freie Parameter δ gewählt werden muß, damit sich eine für das ursprüngliche Dämpfungsapproximationsproblem optimale Lösung $\hat{K}$ ergibt. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$| |K_0| - |K| | \leq |K_0| e^{j\delta} - K| , \quad (2.41)$$

d. h., diese optimale Lösung erhält man z. B. bei Wahl von

$$\delta = \arg\{K(A,p)\} , \quad p = j\omega , \quad \omega \in B . \quad (2.42)$$

Obwohl für beliebiges δ die Existenz einer Minimallösung $\hat{K}$ garantiert ist, kann man über die optimale Lösung $\hat{K}$ hier keine weiteren Aussagen machen, da δ von K abhängig und daher nicht bekannt ist. Formuliert man das in (2.40) gegebene lineare Approximationsproblem unter Berücksichtigung von (2.42) neu, so erhält man ein nichtlineares Approximationsproblem mit der Norm

$$\max_{\omega \in B} | |K_0(p)| - |K(A,p)| | , \quad p = j\omega . \quad (2.43)$$

Hierbei ist die Eindeutigkeit der Lösung nicht gesichert und keine Charakterisierung angebar. Der häufig eingeschlagene Weg, $C_0 = |K_0|^2$ durch $|K|^2$ zu approximieren, führt mit (2.18) und (2.36) nur scheinbar auf ein lineares Approximationsproblem da dann die nichtlineare Nebenbedingung

$$KK_{\star} \geq 0 , \quad p=j\omega \text{ und } -\infty \leq \omega \leq +\infty \quad (2.44)$$

erfüllt sein muß; diese Bedingung ist jedoch bei gewissen Verfahren zur Filterapproximation nicht ohne weiteres einzuhalten.

Im Fall $K_0 = 0$ ist die Minimallösung $\hat{K}$ natürlich identisch mit der optimalen Lösung des Dämpfungsapproximationsproblems $\hat{K}$;

dieser Fall hat große Bedeutung in der Filtertechnik. Die triviale Lösung $A_{j-1}=0, j=1, \dots, gK+1$ wird dadurch ausgeschlossen, daß man ähnlich wie bei den Tschebyscheff-Polynomen in Abhängigkeit von B entweder $A_{gK} \neq 0$ oder $A_{gK-1} \neq 0$ voraussetzt und damit das Problem auf eine normale lineare T.-Approximation mit um Eins geringerer Dimension zurückführt. Man kann hier mit Hilfe der für lineare T.-Approximationen gültigen Invarianzeigenschaften beweisen, daß es stets möglich ist, eine Minimallösung zu finden, bei der $\hat{K}$ entweder eine gerade oder eine ungerade Funktion in p ist. Aus dem Invarianzsatz folgen für $Af = \pm f$, $T: y = -x$ und der Tatsache, daß mit $w_j(p) \in V$, $j=1, \dots, r$ (2.37) auch $\pm w_j(-p)$ zu V gehört, aus $+K_0(-p) = K_0(p)$ bzw. $-K_0(-p) = K_0(p)$ die Eigenschaften

$$+\hat{K}(-p) = \hat{K}(p) \quad \text{bzw.} \quad -\hat{K}(-p) = \hat{K}(p) . \quad (2.45)$$

Diese Eigenschaften ergeben sich also aus der Forderung nach Optimalität und müssen nicht etwa explizit vorausgesetzt werden. Mit (2.40) folgt dann die Existenz eines zu dem gegebenen Approximationsproblem äquivalenten reellwertigen Approximationsproblems. Aus $K(A, p)$ wird allgemein, da die Minimallösungen entweder gerade oder ungerade sind

$$K'(A, \omega) = \sum_{j=1}^{gK+1} A'_{j-1} \frac{\omega^{j-1}}{\prod_{i=1}^f \sqrt{\omega^2 + p_i^2}} , \quad \omega \in B . \quad (2.46)$$

Besteht der kompakte metrische Raum B nur aus einem einzigen abgeschlossenen Intervall $[\alpha, \beta]$ der ω -Achse, so ist der Alternantensatz zur Charakterisierung der Minimallösung jetzt für das äquivalente Approximationsproblem unmittelbar anwendbar. Es sei V_n ein Raum V der oben definierten Art mit der Dimension n . Da mit (2.46) gilt $V_{n-1} \subset V_n$, die Dimension von V_n gleich n ist und

V_n die Haar'sche Bedingung erfüllt, handelt es sich bei dem hier vorliegenden System von linearen Teilräumen V_n in $C[\alpha, \beta]$ um ein Tschebyscheff'sches System [24-27]; damit sind α und β Extremalpunkte. Dies folgt auch sofort aus den Eigenschaften von K und dem Alternantensatz: Ob $A_{gK} \neq 0$ oder $A_{gK-1} \neq 0$ vorauszusetzen ist, hängt jeweils von B ab und muß mit dem Alternantensatz geprüft werden. Besteht B aus mehreren Intervallen gemäß (2.35), so gilt ebenso wie bei der Approximation in diskreten Punkten aus $C[\alpha, \beta]$ der Alternantensatz [73]. Diese Verallgemeinerung ist Grundlage von iterativen Lösungsverfahren bei der Approximation in diskreten Punkten (z. B. Remes-Algorithmus) [25-27]. Alle Intervallgrenzen müssen dann jedoch nicht unbedingt Extremalpunkte sein. Für die Filtertechnik haben Symmetriefälle, in denen alle Intervallgrenzen Extremalpunkte sind, besondere Bedeutung; hierbei sind bei der Approximation noch spezielle Nebenbedingungen einzuhalten. Außerdem fordert man in der Filtertechnik häufig auch

$$\max_{\omega \in B} | |K_O(p)| - |K(A,p)| | < \min_{\omega \notin B} | |K_O(p)| - |K(A,p)| |, \quad (2.47)$$

$p = j\omega.$

Trotz der Tatsache, daß der Nenner f in (2.36) bzw. (2.46) immer eine gerade oder ungerade Funktion in p bzw. ω darstellt, gelten die in diesem Kap. gemachten Aussagen über die Dämpfungsapproximation auch allgemein für nichtreziproke verlustfreie Filter. Dies folgt, da man Faktoren der Form $(p^2 - p_i^2)^{1/2}$ durch $(p - p_i)$ ersetzen kann, ohne daß sich die Dämpfung ändert (vergl. Kap. 2.2.1). Natürlich ist hierbei zu beachten, daß die p_i entweder reell oder paarweise konjugiert komplex sein müssen.

2.2.4 Lösung des Problems zur Approximation der Dämpfung Null

2.2.4.1 Allgemeines Verfahren

Für lineare Tschebyscheff-Approximationsprobleme sind nur eine geringe Zahl von Verfahren zur Bestimmung von geschlossenen Lösungen bekannt, obwohl diese u. a. wegen des wesentlich geringeren Rechenaufwands iterativen Lösungsverfahren unbedingt vorzuziehen sind. Hierzu gehören auf Tschebyscheff zurückgehende Verfahren zur Approximation der Null durch Polynome bzw. rationale Funktionen (mit festen Polen) von bestimmtem Grad im Intervall $[-1,1]$ [24]. Es wird nun ein Verfahren zur Konstruktion von geschlossenen Lösungen bei Tiefpaß-, Hochpaß-, Bandpaß- und Bandsperreffiltern mit Approximation der Dämpfung Null im Durchlaßbereich angegeben, wobei die Optimallösung $\hat{K}$ jeweils folgenden Bedingungen genügen soll:

- a) $\hat{K}$ ist Optimallösung des T.-Approximationsproblems.
- b) Alle Intervallgrenzen sind Extrempunkte, auch wenn der Bereich B aus mehreren Intervallen besteht.
- c) Die Dämpfung soll außerhalb des Durchlaßbereichs immer größer als innerhalb sein (2.47).

Die Erfüllung der zusätzlichen Bedingungen b) und c) ist eine wichtige Voraussetzung bei der Entwicklung des Verfahrens; durch sie werden in Abhängigkeit vom Filtertyp teilweise in der Filtertechnik weniger gebräuchliche Filterklassen ausgeschlossen und gegebenenfalls weitere Nebenbedingungen an die Lage der Dämpfungspole gestellt.

Bei klassischen verlustfreien Filtern wird das Referenz-

filterverfahren [39] bzw. eine Methode unter Benutzung von Q-Funktionen [28] zur Lösung des gegebenen Approximationsproblems verwendet [29-32,38]. Beide Verfahren ergeben sich aus der Wellenparametertheorie. Erweiterungen dieser Verfahren auf Einheits-elementfilter sind für bestimmte Filtertypen angegeben worden [33,42]. Besonders für Digitalrechner geeignet sind die von Fettweis für klassische symmetrische bzw. antimetrische Tiefpässe und Bandpässe aufgestellten rekursiven Formeln [31]. Im folgenden soll nun kein größerer Rückgriff auf die Wellenparametertheorie stattfinden, sondern die Entwicklung eines allgemeinen für klassische verlustfreie Filter und Einheits-elementfilter gültigen Approximationsverfahrens mit Hilfe der Eigenschaft linearer Approximationen begründet werden. Von besonderer Wichtigkeit ist hierbei die im Kap. 2.2.3 bewiesene Existenz des äquivalenten reellwertigen Approximationsproblems und der damit gezeigten Gültigkeit des Alternantensatzes. Die Entwicklung rekursiver Formeln erfolgt dabei durch Verallgemeinerung der von Bernstein für die Approximation der Null im Intervall $[-1,1]$ durch rationale Funktionen mit festen Polen beschriebenen Konstruktionsmethode [24]. Diese Verallgemeinerung umfaßt Funktionen der Form von (2.25) und die Approximation in mehreren getrennten Intervallen (verschiedene Filtertypen). Außer den oben genannten Filtertypen sollen keine Filter mit einer noch größeren Zahl von Durchlaß- und Sperrbereichen behandelt werden, da diese für die Filtertechnik nicht so wichtig sind. Es wird sich zeigen, daß eine Unterscheidung zwischen symmetrischen und antimetrischen Filtern bei diesem Verfahren nicht erforderlich ist.

Die charakteristische Funktion (2.25) läßt sich darstellen durch

$$K(p) = \frac{\sum_{i=0}^n A_i p^i}{g f \prod_{i=1}^n \sqrt{p^2 - p_i^2}} = H \cdot \text{ch}\varphi, \quad (2.48)$$

mit $n=gK$, $\text{Re}\{p_i\} \geq 0 \forall i$ und

$$H = (10^{A_d/10} - 1)^{1/2}. \quad (2.49)$$

A_d ist die max. Dämpfung im Durchlaßbereich. Weiterhin ist es möglich, φ durch eine bestimmte Zerlegung

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\ell} \varphi_i, \quad \ell \leq n, \quad (2.50)$$

darzustellen, wobei φ_i später noch festgelegt wird. Die Bedingung c) ist erfüllt, wenn φ im Durchlaßbereich rein imaginär und im Sperrbereich rein reell ist. Ist φ noch an allen Intervallgrenzen entweder 0 oder $j\pi$ (die weitere Unbestimmtheit mit der Periode $j2\pi$ hat hier keine Bedeutung), so wird die Bedingung b) eingehalten. Wächst oder fällt φ außerdem im betrachteten Bereich monoton um $n \cdot j\pi$, so ist der Alternantensatz für das äquivalente reellwertige Problem erfüllt, da hier die Dimension des linearen T.-Approximationsproblems zur Approximation der Null gleich n ist und es daher $n+1$ Alternantenpunkte gibt. Zusätzlich muß $H \cdot \text{ch}\varphi$ bei gegebenen p_i und gegebener Zahl der Pole im Unendlichen m genau die Form der charakteristischen Funktion in (2.48) ergeben. Die Konstruktion von Optimallösungen $\hat{K}$, die die Bedingungen a) - c) erfüllen, erfolgt nun entsprechend (2.50) durch Zusammenfassen von Elementartermen φ_i , wobei die Funktionen $\text{ch}\varphi_i$ von möglichst niedrigem Grad sind. Zu jedem Elementarterm φ_i gehören je nach Filtertyp ein oder zwei Pole bzw. polartige Verzweigungspunkte der charakteristischen Funktion. Die Terme φ_i haben entweder einzeln oder nach dem Zusammenfassen zweier Terme $\varphi_i + \varphi_{i+1}$ die Eigenschaften von φ . Eine solche Zusammenfassung ist

z. B. bei komplexen p_i erforderlich. Es gelten folgende Beziehungen:

$$\operatorname{sh}^2 \varphi_i = \operatorname{ch}^2 \varphi_i - 1 \quad (2.51)$$

$$\operatorname{ch}(\varphi_i \pm \varphi_j) = \operatorname{ch} \varphi_i \operatorname{ch} \varphi_j \pm \operatorname{sh} \varphi_i \operatorname{sh} \varphi_j \quad (2.52a, b)$$

$$\operatorname{sh}(\varphi_i \pm \varphi_j) = \operatorname{sh} \varphi_i \operatorname{ch} \varphi_j \pm \operatorname{ch} \varphi_i \operatorname{sh} \varphi_j$$

Die Funktionen $\operatorname{ch} \varphi_i$ und $\operatorname{sh} \varphi_i$ können Ausdrücke der Form $\sqrt{z}$ mit $z = p_i^2 + a$, $a = \text{const.} \geq 0$, enthalten. Wie explizit bei Tiefpässen gezeigt wird, muß man beim Zusammenfassen zweier Terme mit konjugiert komplexen p_i den Ausdruck $\sqrt{z}$ als reelle Funktion definieren. Dies geschieht dadurch, daß man einen eindeutigen Zweig der Wurzel so bestimmt, indem man aus der komplexen Ebene die negativ reelle Halbachse entfernt (Bild 2.4). Die Punkte $z=0$ bzw. $z=\infty$ kann man später wieder ergänzen.

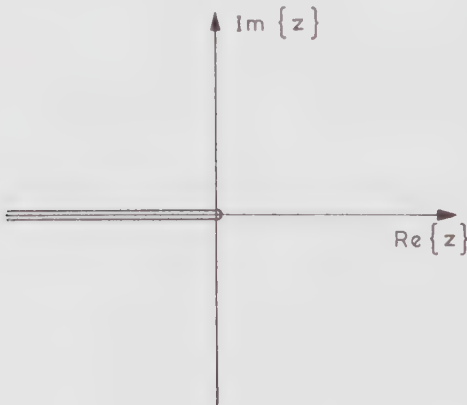


Bild 2.4 Festlegung eines eindeutigen Zweiges von $\sqrt{z}$.

Durch diese Festlegung wird die Lage der p_i auf die offene rechte Halbebene $\operatorname{Re}\{p_i\} > 0$ begrenzt. Dies bedeutet jedoch keine wesentliche Einschränkung, da man rein imaginäre $p_i = j\omega_i$ durch $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} p_i = \epsilon + j\omega_i$ darstellen kann. Außerdem kann man zeigen, daß für rein reelle bzw. rein imaginäre p_i ein Übergang auf eine Darstellung möglich ist, bei der anstelle von $\sqrt{z}$ nur $|\sqrt{z}|$ vorkommt. Diese Fallunterscheidungen sollen jedoch vermieden werden.

Die Funktionen $\operatorname{ch}\varphi_i$ ergeben sich für jeden Filtertyp aus den Eigenschaften von φ und φ_i [24]. Sie lassen sich außerdem sehr einfach aus elementaren Q-Funktionen mit Hilfe der Gleichungen

$$q_i = \operatorname{cth}\varphi_i \quad (2.53)$$

$$\operatorname{ch}\varphi_i = \frac{\operatorname{cth}\varphi_i}{\sqrt{\operatorname{cth}^2\varphi_i - 1}} = \frac{q_i}{\sqrt{q_i^2 - 1}}$$

und

(2.54)

$$\operatorname{sh}\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2\varphi_i - 1}} = \frac{1}{\sqrt{q_i^2 - 1}}$$

bestimmen. Hierbei gilt [28]

$$q_i = m_i q_0 \quad (2.55)$$

Durch m_i wird die Lage eines Dämpfungspols festgelegt. Für m_i sollen hier auch komplexe Werte zugelassen werden.

2.2.4.2 Rekursive Formeln für Tiefpässe

Es werden folgende Bezeichnungen benutzt:

ω_d = Grenzfrequenz

$\Omega = \omega/\omega_d$

$p = j\Omega$

p_i = normierte Frequenz des i-ten Dämpfungspols

n = Grad der charakteristischen Funktion

m = Zahl der Pole bei Unendlich

l = Zahl der Elementarterme.

Mit $r \leq l = n$ und (2.50) gilt

$$\Phi_r = \sum_{i=1}^r \varphi_i \quad , \quad (2.56)$$

d. h.,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_r &= \Phi_{r-1} + \varphi_r \\ \Phi_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{mit} \quad (2.57)$$

Die zu berechnende charakteristische Funktion ergibt sich mit dieser Notation zu

$$K = H \operatorname{ch} \Phi_l \quad . \quad (2.58)$$

Mit (2.52) erhält man aus (2.57) folgende rekursive Formeln

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \Phi_r &= \operatorname{ch}(\Phi_{r-1} + \varphi_r) = \\ &= \operatorname{ch} \Phi_{r-1} \operatorname{ch} \varphi_r + \operatorname{sh} \Phi_{r-1} \operatorname{sh} \varphi_r \\ \operatorname{sh} \Phi_r &= \operatorname{sh}(\Phi_{r-1} + \varphi_r) = \\ &= \operatorname{sh} \Phi_{r-1} \operatorname{ch} \varphi_r + \operatorname{ch} \Phi_{r-1} \operatorname{sh} \varphi_r \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

Eine für Tiefpässe geeignete Q-Funktion ist

$$q_0 = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \quad (2.60)$$

Daraus folgen $\operatorname{ch} \varphi_i$ und $\operatorname{sh} \varphi_i$ mit

$$m_i = \frac{\sqrt{1+p_i^2}}{p_i} \quad (2.61)$$

unter Verwendung von (2.54), (2.55) bzw. (2.51) zu

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \varphi_i &= \frac{\sqrt{p_i^2+1}}{\sqrt{p^2-p_i^2}} \frac{p}{p_i} \\ \operatorname{sh} \varphi_i &= p_i \frac{\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{p^2-p_i^2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

Der Bereich B ist durch das abgeschlossene Intervall $[-1,1]$ gegeben. Man prüft für reelles p_i leicht nach, daß eine durch $\operatorname{ch} \varphi_i$ gegebene charakteristische Funktion in B die in Kap. 2.2.4.1 angegebenen Bedingungen a) - c) erfüllt; wegen (2.62) wächst φ_i in B monoton um $j\pi$.

Für zwei konjugiert komplexe p_i und p_j gilt mit der getroffenen Festlegung von $\sqrt{p_i^2+1}$ und $\sqrt{p_j^2+1}$ gemäß Kap. 2.2.4.1

$$\operatorname{ch}(\varphi_i + \varphi_j) = \frac{\sqrt{p_i^2+1} \sqrt{p_j^2+1} p^2 + p_i p_j (p^2+1)}{\sqrt{p^2-p_i^2} \sqrt{p^2-p_j^2}} \quad (2.63)$$

$$\operatorname{sh}(\varphi_i + \varphi_j) = \frac{(p_i \sqrt{p_j^2+1} + p_j \sqrt{p_i^2+1}) p \sqrt{p^2+1}}{\sqrt{p^2-p_i^2} \sqrt{p^2-p_j^2}} \quad (2.64)$$

Da $p_j = p_i^*$ ist, folgt sofort

$$\operatorname{ch}(\varphi_i + \varphi_j) = \frac{|p_i^2 + 1| p^2 + |p_i|^2 (p^2 + 1)}{\sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_i^{*2})}} \quad (2.65)$$

$$\operatorname{sh}(\varphi_i + \varphi_j) = \frac{2\operatorname{Re}\{p_i \sqrt{p_i^{*2} + 1}\} p \sqrt{p^2 + 1}}{\sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_i^{*2})}} \quad (2.66)$$

Auch hier kann man durch elementare Rechnung nachprüfen, daß eine durch $\operatorname{ch}(\varphi_i + \varphi_j)$ gegebene charakteristische Funktion die angegebenen Bedingungen a) - c) erfüllt. Die Funktion ist zweiten Grades und nimmt für $\Omega = -1$, $\Omega = 0$ und $\Omega = +1$ drei Extremalwerte vom Betrage 1 mit wechselndem Vorzeichen an; $\varphi_i + \varphi_j$ wächst in B monoton um $j2\pi$. Für rein reelle p_i oder rein imaginäre p_i erkennt man aus (2.65) und (2.66), daß man in (2.62) anstelle von $\sqrt{p_i^2 + 1}$ bzw. p_i die Ausdrücke $\sqrt{|p_i^2 + 1|}$ bzw. $|p_i|$ benutzen darf, d. h., man kann ohne Verwendung komplexer Zahlen auskommen. Das noch frei wählbare Vorzeichen der Wurzel im Nenner hat für die Dämpfung keine Bedeutung. Grundsätzlich ist es nicht nötig, die Terme φ_i und φ_j , die zu konjugiert komplexen p_i und p_j gehören, paarweise zusammenzufassen, da die Reihenfolge der Terme in (2.50) und (2.56) ohne Einfluß auf das Ergebnis ist.

Für Dämpfungspole $p_i = \infty$ erhält man aus (2.62)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \varphi_i &= \frac{p}{j} \\ \operatorname{sh} \varphi_i &= \frac{\sqrt{p^2 + 1}}{j} \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

Dies gilt unabhängig davon, auf welchem Weg man p_i gegen ∞ gehen läßt. Die in (2.67) eigentlich noch vorhandenen Faktoren j kann man

weglassen, da sie keinerlei Einfluß auf die Dämpfung haben.

Um auf eine brauchbare rekursive Formel für die Koeffizienten des Zählerpolynoms h der charakteristischen Funktion zu kommen, werden folgende Hilfsfunktionen definiert

$$\left. \begin{aligned} \text{cha } \Phi_r &= \text{ch } \Phi_r \prod_{i=1}^r \sqrt{p_i^2 - p_i^2} & \text{a)} \\ \text{sha } \Phi_r &= \text{sh } \Phi_r \sqrt{1+p^2} \prod_{i=1}^r \sqrt{p_i^2 - p_i^2} & \text{b)} \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \text{cha } \Phi_0 &= \text{ch } \Phi_0 = \text{ch } 0 = 1 \\ \text{sha } \Phi_0 &= \text{sh } \Phi_0 = \text{sh } 0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

Aus (2.59), (2.62), (2.67), (2.68) und (2.69) kann man nun folgende rekursive Formeln für diese neu definierten Funktionen unter Verwendung der Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} c_i &= \sqrt{p_i^2 + 1} \\ \text{und} \\ s_i &= p_i \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

ableiten

$$\left. \begin{aligned} \text{cha } \Phi_r &= c_r p \text{ cha } \Phi_{r-1} + s_r \text{ sha } \Phi_{r-1} \\ \text{sha } \Phi_r &= c_r p \text{ sha } \Phi_{r-1} + s_r (1+p^2) \text{ cha } \Phi_{r-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.71)$$

Wendet man diese Formeln mit $r=1$ beginnend nacheinander unter Beachtung von (2.69) an, so ergibt sich, daß cha ein Polynom vom Grad r und sha ein Polynom vom Grad $r+1$ in p ist. Man kann

also schreiben

$$\left. \begin{aligned} \text{cha } \phi_r &= \sum_{i=0}^r A_{r,i} p^i & (a) \\ \text{sha } \phi_r &= \sum_{i=0}^{r+1} B_{r,i} p^i & (b) \end{aligned} \right\} \quad (2.72)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} A_{0,0} &= 1 \\ B_{0,0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

Diese letzten Beziehungen folgen sofort aus (2.69) und (2.72).

Daher erhält man aus (2.71) und (2.72)

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^r A_{r,i} p^i &= c_r p \sum_{i=0}^{r-1} A_{r-1,i} p^i + s_r \sum_{i=0}^r B_{r-1,i} p^i \\ \sum_{i=0}^{r+1} B_{r,i} p^i &= c_r p \sum_{i=0}^r B_{r-1,i} p^i + s_r (1+p^2) \sum_{i=0}^{r-1} A_{r-1,i} p^i \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^r A_{r,i} p^i &= c_r \sum_{i=0}^r A_{r-1,i-1} p^i + s_r \sum_{i=0}^r B_{r-1,i} p^i \\ \sum_{i=0}^{r+1} B_{r,i} p^i &= c_r \sum_{i=0}^{r+1} B_{r-1,i-1} p^i + s_r \sum_{i=0}^{r-1} A_{r-1,i} p^i + s_r \sum_{i=0}^{r+1} A_{r-1,i-2} p^i \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

Führt man nun einen Koeffizientenvergleich auf beiden Seiten von (2.75) durch und definiert man

$$\left. \begin{aligned} A_{r,i} &= 0 \quad \text{für} \quad i < 0 \quad \text{und} \quad i > r \\ \text{und} \\ B_{r,i} &= 0 \quad \text{für} \quad i < 0 \quad \text{und} \quad i > r+1 \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} A_{r,i} &= c_r A_{r-1,i-1} + s_r B_{r-1,i} \\ B_{r,i} &= c_r B_{r-1,i-1} + s_r A_{r-1,i} + s_r A_{r-1,i-2} \end{aligned} \right\} . \quad (2.77)$$

Diese Gleichungen müssen für $r \geq 1$ bei $A_{r,i}$ für $0 \leq i \leq r$ und bei $B_{r,i}$ für $0 \leq i \leq r+1$ ausgewertet werden. Zuletzt folgt aus (2.58), (2.68a) und (2.72a)

$$\hat{K} = H \frac{\text{cha}\phi_n}{\prod_{i=1}^n \sqrt{p^2 - p_i^2}} = H \frac{\sum_{i=0}^n A_{n,i} p^i}{\prod_{i=1}^n \sqrt{p^2 - p_i^2}} . \quad (2.78)$$

Dies zeigt, daß die $A_{r,i}$ bis $r = n$ und die $B_{r,i}$ bis $r = n-1$ berechnet werden müssen. Falls das Filter m Dämpfungspole bei $p = \infty$ enthält, werden die entsprechenden Faktoren im Nenner gleich 1 und $c_i = s_i = 1$. Daraus ergibt sich

$$\hat{K} = H \frac{\sum_{i=0}^n A_{n,i} p^i}{\prod_{i=1}^n \sqrt{p^2 - p_i^2}} , \quad gf = n-m . \quad (2.79)$$

Aus (2.71) folgt, daß $\text{cha}\phi_r$ bzw. $\text{sha}\phi_r$ immer entweder gerade oder ungerade Funktionen in p sind. Diese Eigenschaften lassen sich zur Verringerung des Rechenaufwands bei der Anwendung von (2.77) verwenden. Kann der Nenner f entsprechend (2.21) als gerade in p betrachtet werden, so ergibt sich, daß für n gerade $\hat{K}$ eine gerade Funktion in p ist und für n ungerade $\hat{K}$ eine ungerade Funktion in p ist; d. h., für n gerade erhält man antimetrische Filter und für n ungerade symmetrische Filter.

2.2.4.3 Rekursive Formeln für Hochpässe

Es werden folgende Bezeichnungen benutzt:

ω_d = Grenzfrequenz

Ω = ω / ω_d

p = $j\Omega$

p_i = normierte Frequenz des i-ten
Dämpfungspols

n = Grad der charakteristischen Funktion

ℓ = Zahl der Elementarterme.

Wie bei Tiefpässen gelten auch hier mit $r \leq \ell = n$ die Gleichungen (2.56) - (2.59). Eine für Hochpässe geeignete Q-Funktion ist

$$q_0 = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \quad . \quad (2.80)$$

Daraus folgen $\text{ch}\varphi_i$ und $\text{sh}\varphi_i$ mit

$$m_i = \sqrt{1+p_i^2} \quad (2.81)$$

unter Verwendung von (2.54), (2.55) bzw. (2.51) zu

$$\left. \begin{aligned} \text{ch}\varphi_i &= \frac{\sqrt{p_i^2+1}}{j\sqrt{p^2-p_i^2}} \\ \text{sh}\varphi_i &= \frac{\sqrt{p^2+1}}{j\sqrt{p^2-p_i^2}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad (2.82)$$

Der Bereich B ist durch das abgeschlossene Intervall $[1, -1]$ ¹⁾ gegeben. Man prüft für reelles p_i leicht nach, daß eine durch $\text{ch}\varphi_i$ gegebene charakteristische Funktion in B die in Kap. 2.2.4.1 an-

1) Dieses so dargestellte Intervall enthält den Punkt $\Omega = \infty$.

gegebenen Bedingungen a)- c) erfüllt. Für zwei konjugiert komplexe p_i und p_j läßt sich wie bei Tiefpässen zeigen, daß eine durch $\text{ch}(\varphi_i + \varphi_j)$ gegebene charakteristische Funktion die angegebenen Bedingungen a) - c) einhält. Für rein reelle oder rein imaginäre p_i kommt man auch hier ohne Verwendung komplexer Zahlen aus. Das Vorzeichen der Wurzel und der Faktor j im Nenner von $\text{ch}\varphi_i$ und $\text{sh}\varphi_i$ (2.82) haben für die Dämpfung keine Bedeutung. Den Faktor j kann man später weglassen.

Um auf eine brauchbare rekursive Formel für die Koeffizienten des Zählerpolynoms h der charakteristischen Funktion zu kommen, werden folgende Hilfsfunktionen definiert (diese entsprechen bis auf den Faktor j den bei Tiefpässen benutzten Funktionen)

$$\left. \begin{aligned} \text{cha}\Phi_r &= \text{ch}\Phi_r \prod_{i=1}^r (j\sqrt{p^2 - p_i^2}) & \text{a)} \\ \text{sha}\Phi_r &= \text{sh}\Phi_r \sqrt{1+p^2} \prod_{i=1}^r (j\sqrt{p^2 - p_i^2}) & \text{b)} \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \text{cha}\Phi_0 &= \text{ch}\Phi_0 = \text{ch } 0 = 1 \\ \text{sha}\Phi_0 &= \text{sh}\Phi_0 = \text{sh } 0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

Aus (2.59), (2.82), (2.83) und (2.84) kann man nun folgende rekursive Formeln für diese hier definierten Funktionen unter Verwendung der Bezeichnung

$$c_i = \sqrt{p_i^2 + 1} \quad (2.85)$$

ableiten

$$\text{cha}\phi_r = c_r \text{cha}\phi_{r-1} + \text{sha}\phi_{r-1} \quad (2.86)$$

$$\text{sha}\phi_r = c_r \text{sha}\phi_{r-1} + (1+p^2) \text{cha}\phi_{r-1}$$

Wendet man diese Formeln mit $r = 1$ beginnend nacheinander unter Beachtung von (2.84) an, so ergibt sich, daß cha ein Polynom vom Grad $s = 2 \lfloor r/2 \rfloor$ und sha ein Polynom vom Grad $t = 2 \lfloor (r+1)/2 \rfloor$ in p ist. Die eckige Klammer steht hier für größte ganze Zahl. Man kann also schreiben

$$\left. \begin{aligned} \text{cha}\phi_r &= \sum_{i=0}^s A_{r,i} p^i & \text{a)} \\ \text{sha}\phi_r &= \sum_{i=0}^t B_{r,i} p^i & \text{b)} \end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} A_{0,0} &= 1 \\ B_{0,0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

Diese letzten Beziehungen folgen sofort aus (2.84) und (2.87).

Daher erhält man auch (2.86) und (2.87)

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^s A_{r,i} p^i &= c_r \sum_{i=0}^{t-2} A_{r-1,i} p^i + \sum_{i=0}^s B_{r-1,i} p^i \\ \sum_{i=0}^t B_{r,i} p^i &= c_r \sum_{i=0}^s B_{r-1,i} p^i + (1+p^2) \sum_{i=0}^{t-2} A_{r-1,i} p^i \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^s A_{r,i} p^i &= c_r \sum_{i=0}^{t-2} A_{r-1,i} p^i + \sum_{i=0}^s B_{r-1,i} p^i \\ \sum_{i=0}^t B_{r,i} p^i &= c_r \sum_{i=0}^s B_{r-1,i} p^i + \sum_{i=0}^{t-2} A_{r-1,i} p^i + \sum_{i=0}^t A_{r-1,i-2} p^i \end{aligned} \right\} \quad (2.90).$$

Führt man nun einen Koeffizientenvergleich auf beiden Seiten von (2.90) durch und definiert man

$$\left. \begin{aligned} A_{r,i} &= 0 \quad \text{für } i < 0 \quad \text{und } i > s \\ \text{und} \\ B_{r,i} &= 0 \quad \text{für } i < 0 \quad \text{und } i > t \end{aligned} \right\} \quad , \quad (2.91)$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} A_{r,i} &= c_r A_{r-1,i} + B_{r-1,i} \\ B_{r,i} &= c_r B_{r-1,i} + A_{r-1,i} + A_{r-1,i-2} \end{aligned} \right\} \quad . \quad (2.92)$$

Diese Gleichungen müssen für $r \geq 1$ bei $A_{r,i}$ für $0 \leq i \leq s$ und für $B_{r,i}$ für $0 \leq i \leq t$ ausgewertet werden. Zuletzt folgt aus (2.58), (2.83a) und (2.87a)

$$\hat{K} = H \frac{\text{cha}\phi_n}{\prod_{i=1}^n \sqrt{p^2 - p_i^2}} = H \frac{\sum_{i=0}^{2[n/2]} A_{n,i} p^i}{\prod_{i=1}^n \sqrt{p^2 - p_i^2}} \quad . \quad (2.93)$$

Dies zeigt, daß die $A_{r,i}$ bis $r = n$ und die $B_{r,i}$ bis $r = n-1$ berechnet werden müssen. Die Tatsache, daß $A_{n,n} = 0$ für n ungerade gilt, steht nicht im Widerspruch zu den Optimalitätseigenschaften, da dann eine Nullstelle von $\hat{K}$ bei $p = \infty$ erscheint. Dieser Effekt tritt nicht auf, wenn man mit Hilfe einer Frequenztransformation das Intervall $[1, -1]$ in ein Intervall, das den Punkt $\Omega = \infty$ nicht enthält, überführt. Aus (2.86) folgt, daß $\text{cha}\phi_r$ bzw. $\text{sha}\phi_r$ immer gerade Funktionen in p sind. Diese Eigenschaften lassen sich auch hier wie bei den Tiefpässen zur Verringerung des Rechenaufwands bei der Anwendung von (2.92) verwenden. Kann der Nenner f in (2.21) als gerade in p betrachtet werden, so erhält man - mit $\hat{K}$

gerade - antimetrische Filter. Ist der Nenner f ungerade in p , d. h., existiert ein einfacher Dämpfungspol bei $p = 0$, so erhält man - mit $\hat{K}$ ungerade - symmetrische Filter. Obwohl man das Problem der Hochpaß-Approximation mit Hilfe der Frequenztransformation

$$p' = \frac{1}{p} \quad (2.94)$$

in ein Tiefpaß-Approximationsproblem umwandeln kann, wurde die Hochpaß-Approximation als Beispiel für eine Approximation auf einem Intervall, das den Punkt $\Omega = \infty$ enthält, behandelt. Ein Vergleich zwischen den rekursiven Formeln für Hochpässe (2.92) und Tiefpässe (2.77) zeigt außerdem, daß man beide leicht in einem einzigen Algorithmus vereinigen kann. Der zusätzliche Aufwand der Frequenztransformation kann daher eingespart werden.

2.2.4.4 Rekursive Formeln für Bandpässe

Es werden folgende Bezeichnungen benutzt:

ω_{d1} = untere Grenzfrequenz

ω_{d2} = obere Grenzfrequenz

$\omega_0 = \sqrt{\omega_{d2} \omega_{d1}}$

$\Omega = \omega/\omega_0$

$p = j\Omega$

p_i = normierte Frequenz des i-ten
Dämpfungspols

n = Grad der charakteristischen Funktion

l = Zahl der Elementarterme

$c = \omega_{d2}/\omega_{d1} = \Omega_{d2}/\Omega_{d1} > 1$

$k = (c-1/c)^{-1/2}$, reell.

Wie bei Tiefpässen gelten auch hier mit $r \leq l = n$ die Gleichungen (2.56) - (2.59). Eine für Bandpässe geeignete Q-Funktion ist

$$q_0 = \sqrt{\frac{cp^2+1}{p^2+c}} \quad (2.95)$$

Daraus folgen $\operatorname{ch}\varphi_i$ und $\operatorname{sh}\varphi_i$ mit

$$m_i = \sqrt{\frac{p_i^2+c}{cp_i^2+1}} \quad (2.96)$$

unter Verwendung von (2.54), (2.55) bzw. (2.51) zu

$$\operatorname{ch}\varphi_i = k\sqrt{p_i^2+c} \frac{\sqrt{p^2+1/c}}{\sqrt{p^2-p_i^2}} \quad (2.97)$$

$$\operatorname{sh}\varphi_i = k\sqrt{p_i^2+1/c} \frac{\sqrt{p^2+c}}{\sqrt{p^2-p_i^2}}$$

Der Bereich B ist durch die abgeschlossenen Intervalle

$$[-\Omega_{d2}, -\Omega_{d1}] = [-\sqrt{c}, -1/\sqrt{c}] \text{ und } [\Omega_{d1}, \Omega_{d2}] = [1/\sqrt{c}, \sqrt{c}] \text{ gegeben.}$$

Da für $\Omega > 0$ nur ein Intervall vorhanden ist, lassen sich $\text{ch}\varphi_i$ und $\text{sh}\varphi_i$ zwar noch für einzelne p_i definieren; durch $\text{ch}\varphi_i$ ist jedoch keine charakteristische Funktion gegeben, die in B die in Kap. 2.2.4.1 angegebenen Bedingungen a) - c) erfüllt. Zur Erfüllung dieser Bedingungen müssen jeweils zwei Elementarterme φ_i und φ_j zusammengefaßt werden, d. h., r bzw. n sind immer gerade. Für zwei konjugiert komplexe p_i und p_j läßt sich wie bei Tiefpässen zeigen, daß eine durch $\text{ch}(\varphi_i + \varphi_j)$ gegebene charakteristische Funktion ebenfalls die angegebenen Bedingungen einhält. Für rein reelle bzw. rein imaginäre p_i kommt man auch hier ohne Verwendung komplexer Zahlen aus. Zur Klasse der Bandpässe mit ungeradem n gehören die Achieser-Zolotarev-Polynome bzw. die Achieser-Zolotarev-rationalen Funktionen [74-75]; diese enthalten im Zählerpolynom h eine Nullstelle bei $p = 0$, so daß die Bedingung c) verletzt ist. Auf diese Weise entsteht noch ein weiterer Durchlaßbereich im Intervall $[-\lambda, \lambda]$, wobei λ jedoch nicht fest ist, sondern vom Grad der charakteristischen Funktion abhängt. Die Optimalitätseigenschaften dieser Klasse von Bandpässen mit ungeradem n lassen sich mit dem Alternantensatz überprüfen, man kann jedoch keine rekursiven Formeln angeben.

Für Dämpfungspole $p_i = \infty$ erhält man aus (2.97)

$$\left. \begin{aligned} \text{ch}\varphi_i &= \frac{k}{j} \sqrt{p^2 + 1/c} \\ \text{sh}\varphi_i &= \frac{k}{j} \sqrt{p^2 + c} \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

Dies gilt unabhängig davon, auf welchem Weg man p_i gegen ∞ gehen

läßt. Die in (2.98) eigentlich noch vorhandenen Faktoren j kann man weglassen, da sie keinerlei Einfluß auf die Dämpfung haben.

Um auf eine brauchbare rekursive Formel für die Koeffizienten des Zählerpolynoms h der charakteristischen Funktion zu kommen, werden zunächst jeweils zwei Terme φ_i und φ_j zu einem Term

$$\theta_s = \varphi_i + \varphi_j, \quad s = 1, 2, \dots, n/2 \quad (2.99)$$

zusammengefaßt. Mit (2.52) und (2.97) ergibt sich unter Verwendung der Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} c_i &= k\sqrt{p_i^2 + c} \\ s_i &= k\sqrt{p_i^2 + 1/c} \end{aligned} \right\} \quad (2.100)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \text{ch}\theta_s &= \frac{c_i c_j (p^2 + 1/c) + s_i s_j (p^2 + c)}{\sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_j^2)}} \\ \text{sh}\theta_s &= \frac{(s_i c_j + c_i s_j) \sqrt{(p^2 + 1/c)(p^2 + c)}}{\sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_j^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

sowie mit

$$\left. \begin{aligned} a_s &= c_i c_j + s_i s_j \\ b_s &= \frac{c_i c_j}{c} + s_i s_j c \\ d_s &= s_i c_j + c_i s_j \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \theta_s &= \frac{a_s p^2 + b_s}{\sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_j^2)}} \\ \operatorname{sh} \theta_s &= \frac{d_s \sqrt{(p^2 + 1/c)(p^2 + c)}}{\sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_j^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

Mit $t \leq n/2$ und (2.50) gilt

$$\Phi_t = \sum_{s=1}^t \theta_s \quad (2.104)$$

Es werden folgende Hilfsfunktionen definiert

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{cha} \Phi_t &= \operatorname{ch} \Phi_t \prod_{i=1}^{2t} \sqrt{p^2 - p_i^2} & \text{a)} \\ \operatorname{sha} \Phi_t &= \operatorname{sh} \Phi_t \sqrt{(p^2 + 1/c)(p^2 + c)} \prod_{i=1}^{2t} \sqrt{p^2 - p_i^2} & \text{b)} \end{aligned} \right\} \quad (2.105)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{cha} \Phi_0 &= \operatorname{ch} \Phi_0 = \operatorname{ch} 0 = 1 \\ \operatorname{sha} \Phi_0 &= \operatorname{sh} \Phi_0 = \operatorname{sh} 0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.106)$$

Aus (2.59), (2.103), (2.105) und (2.106) kann man nun folgende rekursive Formeln für diese hier definierten Funktionen ableiten

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{cha} \Phi_t &= (a_t p^2 + b_t) \operatorname{cha} \Phi_{t-1} + d_t \operatorname{sha} \Phi_{t-1} \\ \operatorname{sha} \Phi_t &= (a_t p^2 + b_t) \operatorname{sha} \Phi_{t-1} + d_t (p^2 + 1/c)(p^2 + c) \operatorname{cha} \Phi_{t-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.107).$$

Wendet man diese Formeln mit $t = 1$ beginnend nacheinander unter Beachtung von (2.106) an, so ergibt sich, daß cha ein gerades Polynom vom Grad $2t$ und sha ein gerades Polynom vom Grad $2t+2$ in p ist. Man kann also schreiben

$$\begin{aligned} \text{cha}\phi_t &= \sum_{s=0}^t A_{t,s} p^{2s} & \text{a)} \\ \text{sha}\phi_t &= \sum_{s=0}^{t+1} B_{t,s} p^{2s} & \text{b)} \end{aligned} \quad (2.108)$$

mit

$$\begin{aligned} A_{0,0} &= 1 \\ B_{0,0} &= 0 \end{aligned} \quad (2.109)$$

Diese letzten Beziehungen folgen sofort aus (2.106) und (2.108).

Daher erhält man aus (2.107) und (2.108)

$$\sum_{s=0}^t A_{t,s} p^{2s} = (b_t + a_t p^2) \sum_{s=0}^{t-1} A_{t-1,s} p^{2s} + d_t \sum_{s=0}^t B_{t-1,s} p^{2s} \quad (2.110)$$

$$\sum_{s=0}^{t+1} B_{t,s} p^{2s} = (b_t + a_t p^2) \sum_{s=0}^t B_{t-1,s} p^{2s} + d_t [1 + (c+1/c)p^2 + p^4] \sum_{s=0}^{t-1} A_{t-1,s} p^{2s}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^t A_{t,s} p^{2s} &= b_t \sum_{s=0}^{t-1} A_{t-1,s} p^{2s} + a_t \sum_{s=0}^t A_{t-1,s-1} p^{2s} + d_t \sum_{s=0}^t B_{t-1,s} p^{2s} \\ \sum_{s=0}^{t+1} B_{t,s} p^{2s} &= b_t \sum_{s=0}^t B_{t-1,s} p^{2s} + a_t \sum_{s=0}^{t+1} B_{t-1,s-1} p^{2s} + d_t \sum_{s=0}^{t-1} A_{t-1,s} p^{2s} + \\ &+ d_t (c+1/c) \sum_{s=0}^t A_{t-1,s-1} p^{2s} + d_t \sum_{s=0}^{t+1} A_{t-1,s-2} p^{2s} \end{aligned} \quad (2.111)$$

Führt man nun einen Koeffizientenvergleich auf beiden Seiten von (2.111) durch und definiert man

$$\begin{aligned} A_{t,s} &= 0 \quad \text{für } s < 0 \quad \text{und } s > t \\ \text{und} \\ B_{t,s} &= 0 \quad \text{für } s < 0 \quad \text{und } s > t+1 \end{aligned} \quad (2.112)$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} A_{t,s} &= b_t^A A_{t-1,s} + a_t^A A_{t-1,s-1} + d_t^B B_{t-1,s} \\ B_{t,s} &= b_t^B B_{t-1,s} + a_t^B B_{t-1,s-1} + d_t^A [A_{t-1,s} + (c+1/c)A_{t-1,s-1} + \\ &\quad + A_{t-1,s-2}] \end{aligned} \right\} \quad (2.113)$$

Diese Gleichungen müssen für $t \geq 1$ bei $A_{t,s}$ für $0 \leq s \leq t$ und für $B_{t,s}$ für $0 \leq s \leq t+1$ ausgewertet werden. Zuletzt folgt aus (2.58), (2.105a) und (2.108a)

$$\hat{K} = H \frac{\text{cha}\phi_{n,2}}{\prod_{i=1}^n \sqrt{p^2 - p_i^2}} = H \frac{\sum_{s=0}^{n/2} A_{n/2,s} p^{2s}}{\prod_{i=1}^n \sqrt{p^2 - p_i^2}} \quad (2.114)$$

Dies zeigt, daß die $A_{t,s}$ bis $t = n/2$ und die $B_{t,s}$ bis $t = n/2-1$ berechnet werden müssen. Falls das Filter m Dämpfungspole bei $p = \infty$ enthält, werden die entsprechenden Faktoren im Nenner gleich 1 und $c_i = s_i = k$. Daraus ergibt sich

$$\hat{K} = H \frac{\sum_{s=0}^{n/2} A_{n/2,s} p^{2s}}{\frac{gf}{\prod_{i=1}^n \sqrt{p^2 - p_i^2}}}, \quad gf = n-m \quad (2.115)$$

Das Zählerpolynom ist immer eine gerade Funktion in p . Betrachtet man den Nenner f in (2.21) als gerade in p , so erhält man antimetrische Filter. Ist der Nenner f ungerade in p , d. h., existiert ein einfacher Dämpfungspol bei $p = 0$, so erhält man - mit $\hat{K}$ ungerade - symmetrische Filter.

2.2.4.5 Rekursive Formeln für Bandsperren

Es werden folgende Bezeichnungen benutzt

ω_{d1} = untere Grenzfrequenz

ω_{d2} = obere Grenzfrequenz

$\omega_o = \sqrt{\omega_{d2} \omega_{d1}}$

$\Omega = \omega/\omega_o$

$p = j\Omega$

p_i = normierte Frequenz des i-ten
Dämpfungspols

n = Grad der charakteristischen Funktion

ℓ = Zahl der Elementarterme

$c = \omega_{d2}/\omega_{d1} = \Omega_{d2}/\Omega_{d1} > 1$.

Der Bereich B ist durch die abgeschlossenen Intervalle

$[-\Omega_{d1}, \Omega_{d1}] = [-1/\sqrt{c}, 1/\sqrt{c}]$ und $[\Omega_{d2}, -\Omega_{d2}] = [\sqrt{c}, -\sqrt{c}]$ gegeben.

Da für $\Omega > 0$ jetzt zwei Intervalle vorhanden sind, stehen für die Erfüllung der Bedingung b) aus Kap. 2.2.4.1 für $\text{ch}\varphi_i$ von einzelnen p_i nicht genügend Freiheitsgrade zur Verfügung. Es zeigt sich, daß man zu jedem frei wählbaren p_i ein in der Frequenz fest bestimmtes p_i' hinzunehmen muß. Bei Bandsperren ergeben sich aufgrund der zwei Intervalle des Durchlaßbereichs bei Filtern höheren Grades viele verschiedene Möglichkeiten zur Aufteilung der auftretenden Nullstellen; es sollen hier nur symmetrische Aufteilungen betrachtet werden. Je nach der Abhängigkeit des p_i' von p_i erhält man verschiedene Lösungen.

Bandsperren Typ 1

Wie bei Tiefpässen gelten auch hier mit $r \leq \ell = n/2$ (2.56)

- (2.59). Eine für Bandsperren geeignete Q-Funktion ist

$$q_0 = \frac{\sqrt{p^2 + 1/c}}{p\sqrt{p^2 + c}} \quad (2.116)$$

Daraus folgen $\text{ch}\varphi_i$ und $\text{sh}\varphi_i$ mit

$$m_i = \frac{p_i \sqrt{p_i^2 + c}}{\sqrt{p_i^2 + 1/c}} \quad (2.117)$$

unter Verwendung von (2.54), (2.55) bzw. (2.51) zu

$$\left. \begin{aligned} \text{ch}\varphi_i &= \frac{p_i \sqrt{p_i^2 + c}}{\sqrt{p_i^2 + 1/c}} \cdot \frac{\sqrt{p^2 + 1/c}}{j \sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_i'^2)}} \\ \text{sh}\varphi_i &= \frac{p \sqrt{p^2 + c}}{j \sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_i'^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.118)$$

wobei

$$p_i'^2 = -\frac{1}{c} \frac{p_i^2 + c}{p_i^2 + 1/c} \quad (2.119)$$

ist. Man erkennt, daß zu reellen p_i imaginäre p_i' gehören und umgekehrt. d. h., es müssen stets zwei Elementarterme mit konjugiert komplexen p_i bzw. mit konjugiert komplexen p_i' verwendet werden. In diesem Sinn ist das Vorzeichen der Wurzel bei der Berechnung von p_i' mit (2.119) zu wählen. Durch $\text{ch}\varphi_i$ ist keine charakteristische Funktion gegeben, die in B die in Kap. 2.2.4.1 angegebenen Bedingungen a) - c) erfüllt. Zur Erfüllung dieser Bedingungen müssen jeweils zwei Elementarterme φ_i und φ_j zusammengefaßt werden, d. h., r bzw. $n/2$ sind immer gerade. Für zwei konjugiert komplexe p_i und p_j läßt sich wie bei Tiefpässen zeigen, daß eine durch $\text{ch}(\varphi_i + \varphi_j)$ gegebene charakteristische Funktion

ebenfalls die angegebenen Bedingungen einhält. Das Vorzeichen der Wurzel und der Faktor j im Nenner von $\text{ch}\varphi_i$ und $\text{sh}\varphi_i$ (2.118) haben für die Dämpfung keine Bedeutung. Den Faktor j kann man später weglassen.

Um auf eine brauchbare rekursive Formel für die Koeffizienten des Zählerpolynoms der charakteristischen Funktion zu kommen, werden zunächst jeweils zwei Terme φ_i und φ_j zu einem Term

$$\Theta_s = \varphi_i + \varphi_j, \quad s = 1, 2, \dots, n/4 \quad (2.120)$$

zusammengefaßt. Mit (2.52) und (2.118) ergibt sich unter Verwendung der Bezeichnung

$$c_i = \frac{p_i \sqrt{p_i^2 + c}}{\sqrt{p_i^2 + 1/c}} \quad (2.121)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ch}\Theta_s &= \frac{c_i c_j (p^2 + 1/c) + p^4 + c p^2}{-\sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_i'^2)(p^2 - p_j^2)(p^2 - p_j'^2)}} \\ \text{sh}\Theta_s &= \frac{(c_i + c_j) \sqrt{(p^2 + 1/c)(p^2 + c)p^2}}{-\sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_i'^2)(p^2 - p_j^2)(p^2 - p_j'^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.122)$$

sowie mit

$$\left. \begin{aligned} a_s &= c_i c_j + c \\ b_s &= \frac{c_i c_j}{c} \\ d_s &= c_i + c_j \end{aligned} \right\} \quad (2.123)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ch}\theta_s &= \frac{p^4 + a_s p^2 + b_s}{-\sqrt{(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_1'^2)(p^2 - p_j^2)(p^2 - p_j'^2)}} \\ \text{sh}\theta_s &= \frac{d_s \sqrt{(p^2 + 1/c)(p^2 + c)p^2}}{-\sqrt{(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_1'^2)(p^2 - p_j^2)(p^2 - p_j'^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.124)$$

Mit $t \leq n/4$ und (2.50) gilt

$$\phi_t = \sum_{s=1}^t \theta_s \quad (2.125)$$

Es werden folgende Hilfsfunktionen definiert

$$\left. \begin{aligned} \text{cha}\phi_t &= \text{ch}\phi_t \prod_{i=1}^{2t} \left[j \sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_i'^2)} \right] \quad \text{a)} \\ \text{sha}\phi_t &= \text{sh}\phi_t \sqrt{(p^2 + 1/c)(p^2 + c)p^2} \prod_{i=1}^{2t} \left[j \sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_i'^2)} \right] \quad \text{b)} \end{aligned} \right\} \quad (2.126)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} \text{cha}\phi_0 &= \text{ch}\phi_0 = \text{ch } 0 = 1 \\ \text{sha}\phi_0 &= \text{sh}\phi_0 = \text{sh } 0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.127)$$

Aus (2.59), (2.124), (2.126) und (2.127) kann man nun folgende rekursive Formeln für diese hier definierten Funktionen ableiten

$$\left. \begin{aligned} \text{cha}\phi_t &= (p^4 + a_t p^2 + b_t) \text{cha}\phi_{t-1} + d_t \text{sha}\phi_{t-1} \\ \text{sha}\phi_t &= (p^4 + a_t p^2 + b_t) \text{sha}\phi_{t-1} + d_t (p^2 + 1/c)(p^2 + c)p^2 \text{ch}\phi_{t-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.128)$$

Wendet man diese Formeln mit $t = 1$ beginnend nacheinander an, so ergibt sich, daß cha ein gerades Polynom vom Grad $4t$ und sha ein gerades Polynom vom Grad $4t+2$ in p ist. Man kann also schreiben

$$\left. \begin{aligned} \text{cha}\phi_t &= \sum_{s=0}^{2t} A_{t,s} p^{2s} & \text{a)} \\ \text{sha}\phi_t &= \sum_{s=0}^{2t+1} B_{t,s} p^{2s} & \text{b)} \end{aligned} \right\} \quad (2.129)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} A_{0,0} &= 1 \\ B_{0,0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.130)$$

Diese letzten Beziehungen folgen sofort aus (2.127) und (2.129).

Daher erhält man aus (2.128) und (2.129)

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{2t} A_{t,s} p^{2s} &= (b_t + a_t p^2 + p^4) \sum_{s=0}^{2t-2} A_{t-1,s} p^{2s} + \\ &+ d_t \sum_{s=0}^{2t-1} B_{t-1,s} p^{2s} \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{2t+1} B_{t,s} p^{2s} &= (b_t + a_t p^2 + p^4) \sum_{s=0}^{2t-1} B_{t-1,s} p^{2s} + \\ &+ d_t (p^2 + 1/c)(p^2 + c) p^2 \sum_{s=0}^{2t-2} A_{t-1,s} p^{2s} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{2t} A_{t,s} p^{2s} &= b_t \sum_{s=0}^{2t-2} A_{t-1,s} p^{2s} + a_t \sum_{s=0}^{2t-1} A_{t-1,s-1} p^{2s} + \\ &+ \sum_{s=0}^{2t} A_{t-1,s-2} p^{2s} + d_t \sum_{s=0}^{2t-1} B_{t-1,s} p^{2s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=0}^{2t+1} B_{t,s} p^{2s} &= b_t \sum_{s=0}^{2t-1} B_{t-1,s} p^{2s} + a_t \sum_{s=0}^{2t} B_{t-1,s-1} p^{2s} + \\
 &+ \sum_{s=0}^{2t+1} B_{t-1,s-2} p^{2s} + d_t \sum_{s=0}^{2t-1} A_{t-1,s-1} p^{2s} + \\
 &+ d_t (c+1/c) \sum_{s=0}^{2t} A_{t-1,s-2} p^{2s} + d_t \sum_{s=0}^{2t+1} A_{t-1,s-3} p^{2s}
 \end{aligned} \quad (2.132)$$

Führt man nun einen Koeffizientenvergleich auf beiden Seiten von (2.132) durch und definiert man

$$\left. \begin{aligned} A_{t,s} &= 0 \quad \text{für } s < 0 \quad \text{und } s > 2t \\ B_{t,s} &= 0 \quad \text{für } s < 0 \quad \text{und } s > 2t+1 \end{aligned} \right\}, \quad (2.133)$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} A_{t,s} &= b_t A_{t-1,s} + a_t A_{t-1,s-1} + A_{t-1,s-2} + d_t B_{t-1,s} \\ B_{t,s} &= b_t B_{t-1,s} + a_t B_{t-1,s-1} + B_{t-1,s-2} + d_t A_{t-1,s-1} + \\ &+ d_t (c+1/c) A_{t-1,s-2} + d_t A_{t-1,s-3} \end{aligned} \right\} \quad (2.134).$$

Diese Gleichungen müssen für $t \geq 1$ bei $A_{t,s}$ für $0 \leq s \leq 2t$ und für $B_{t,s}$ für $0 \leq s \leq 2t+1$ ausgewertet werden. Zuletzt folgt aus (2.58), (2.126a) und (2.129a)

$$\hat{K} = H \frac{\text{chaf} \frac{n/4}{\prod_{i=1}^{n/2} \sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_i'^2)}}}{\prod_{i=1}^{n/2} \sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_i'^2)}} = H \frac{\prod_{s=0}^{n/2} A_{n/4,s} p^{2s}}{\prod_{i=1}^{n/2} \sqrt{(p^2 - p_i^2)(p^2 - p_i'^2)}} \quad (2.135)$$

Dies zeigt, daß die $A_{t,s}$ bis $t = n/4$ und die $B_{t,s}$ bis $t = n/4-1$ berechnet werden müssen. Das Zählerpolynom ist immer eine gerade

Funktion in p . Betrachtet man den Nenner f in (2.21) als gerade in p , so erhält man nur antimetrische Filter.

Bandsperren Typ 2

Wie bei Tiefpässen gelten auch hier mit $r \leq l = n/2$ (2.56)

- (2.59). Eine weitere für Bandsperren geeignete Q-Funktion ist

$$q_0 = \frac{p}{\sqrt{(p^2+c)(p^2+1/c)}} \quad (2.136)$$

Daraus folgen $\text{ch}\varphi_i$ und $\text{sh}\varphi_i$ mit

$$m_i = \frac{\sqrt{p_i^2+c} \sqrt{p_i^2+1/c}}{p_i} \quad (2.137)$$

unter Verwendung von (2.54), (2.55) bzw. (2.51) zu

$$\left. \begin{aligned} \text{ch}\varphi_i &= \frac{\sqrt{p_i^2+c} \sqrt{p_i^2+1/c}}{p_i} \cdot \frac{p}{j\sqrt{(p^2-p_i^2)(p^2-p_i'^2)}} \\ \text{sh}\varphi_i &= \frac{\sqrt{(p^2+c)(p^2+1/c)}}{j\sqrt{(p^2-p_i^2)(p^2-p_i'^2)}} \end{aligned} \right\} , \quad (2.138)$$

wobei

$$p_i'^2 = \frac{1}{p_i^2} \quad (2.139)$$

ist. Analog zu dem Verfahren bei Typ 1 lassen sich auch hier

rekursive Formeln ableiten, man beachte jedoch, daß man

$\sqrt{p_i^2+c} \sqrt{p_i^2+1/c}$ nicht zu $\sqrt{(p_i^2+c)(p_i^2+1/c)}$ zusammenfassen darf,

da sonst für zulässige p_i die Schnittlinie in Bild 2.4 überschritten werden kann. Man erhält als Ergebnis genau die Approximation,

die man auch nach der üblichen Tiefpaß-Bandsperre-Transformation

bekommt $|28,44|$.

Interessant ist, daß man eine gerade Anzahl von Elementartermen φ_i (Typ 1) mit einer beliebigen Anzahl von Elementartermen φ_j (Typ 2) zu einer charakteristischen Funktion kombinieren kann, falls in beiden Fällen die Grenzfrequenzen gleich sind. Diese Möglichkeit ergibt sich aus den Eigenschaften der Elementarterme nach Kap. 2.2.4.1 und aus (2.124) und (2.138). Hierdurch wird eine größere Flexibilität bei der Wahl der Dämpfungspole erreicht. Betrachtet man den Nenner f in (2.21) als gerade in p , so erhält man bei Typ 2 für $n/2$ ungerade und $p_i = 1$ bzw. $p_i = j$ auch symmetrische Filter. Nach vollständiger Auswertung der jeweiligen rekursiven Formeln erhält man das Ergebnis mit (2.52a).

2.2.4.6 Produktdarstellung

Lassen sich bei der praktischen Berechnung von steilflankigen Filtern (z. B. Filter höheren Grades) die dicht nebeneinander liegenden Nullstellen des Nennerpolynoms h der charakteristischen Funktion K durch die Koeffizienten des Polynoms nicht mehr hinreichend genau darstellen, so kann man die auftretenden Polynome durch ihre Nullstellen beschreiben oder eine dem Filtertyp angepaßte Frequenztransformation benutzen [32-34]. Die Produktmethode hat den Vorteil, daß sie unabhängig vom Filtertyp ist; sie wurde u. a. von Norek für die Approximation von klassischen L,C-Filtern verwendet [79,45].

Wie aus (2.62), (2.67), (2.82), (2.97), (2.98), (2.118) und (2.138) hervorgeht, kann man alle Funktionen $ch\varphi_i$ und $sh\varphi_i$ in folgender allgemeiner Form schreiben

$$\operatorname{ch}\varphi_i = \frac{C_i \sqrt{W_i}}{\sqrt{N_i}} \quad , \quad \operatorname{sh}\varphi_i = \frac{S_i \sqrt{V_i}}{\sqrt{N_i}} \quad . \quad (2.140)$$

Hierin sind C_i , W_i , S_i , V_i und N_i Polynome, die wir in der Produktform

$$M = k_M \prod_{n=1}^{gM} (p - p_{on}) \quad (2.141)$$

darstellen können.

Werden zwei Terme φ_i und φ_j zu einem Term $\theta_s = \varphi_i + \varphi_j$ zusammengefaßt, so folgt mit (2.52) und der Gültigkeit von

$$W_i = W_j \quad , \quad V_i = V_j \quad (2.142)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch}\theta_s &= \frac{C_i C_j W_i + S_i S_j V_i}{\sqrt{N_i N_j}} \\ \operatorname{sh}\theta_s &= \frac{S_i C_j \sqrt{V_i W_j} + C_i S_j \sqrt{W_i V_j}}{\sqrt{N_i N_j}} = \\ &= \frac{(S_i C_j + C_i S_j) \sqrt{W_i V_j}}{\sqrt{N_i N_j}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad (2.143)$$

Man erkennt, daß $\operatorname{ch}\theta_s$ und $\operatorname{sh}\theta_s$ ebenfalls in der allgemeinen Form von (2.140) geschrieben werden können. Es gilt dann

$$W_s = 1 \quad , \quad V_s = W_i V_j \quad , \quad N_s = N_i N_j \quad (2.144a,b,c)$$

$$C_s = C_i C_j W_i + S_i S_j V_i \quad , \quad S_s = S_i C_j + C_i S_j \quad . \quad (2.145a,b)$$

Während die Multiplikation von Polynomen in Produktform sehr

einfach durchzuführen ist, erfordert die Addition von Polynomen in Produktform die rechenintensive iterative Suche von Nullstellen. Das verwendete numerische Verfahren hierzu wird im Kapitel über Filterberechnung näher beschrieben. Bei der Zusammenfassung zweier Elementarterme φ_i und φ_j mit konjugiert komplexen p_i und p_j ergeben sich reelle Polynome C_s und S_s , dies kann man zur Verringerung des Rechenaufwands bei der Polynomaddition ausnutzen. Da der Rechenaufwand stärker als quadratisch mit dem Polynomgrad steigt, erfolgt die weitere Zusammenfassung der Terme zweckmäßigerweise nicht durch fortgesetztes Hinzufügen eines Terms entsprechend (2.57), sondern durch stufenweises Zusammenfassen von Termen näherungsweise gleichen Grades (Bild 2.5). Hierzu läßt sich ebenfalls ein rekursiver Algorithmus entwickeln. Der Rechenaufwand ist natürlich in jedem Fall wesentlich größer als bei der Berechnung der charakteristischen Funktion mit Hilfe der rekursiven Formeln gemäß Kap. 2.2.4.2 - 2.2.4.5.

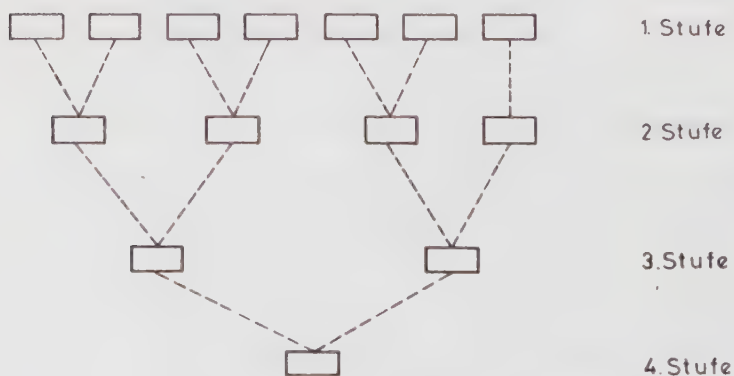


Bild 2.5 Beispiel für optimale Zusammenfassung von Termen näherungsweise gleichen Grades.

2.2.4.7 Numerische Eigenschaften und Beispiele

Für alle vier Filtertypen wurden die Approximationsverfahren mit rekursiven Formeln gemäß Kap. 2.2.4.2 - 2.2.4.5 und mit Produktdarstellung nach Kap. 2.2.4.6 auf einem TR 440 Digitalrechner in der Programmiersprache ALGOL 60 realisiert; die Wortlänge war hierbei in Gleitkomma-Arithmetik 10 Dezimalstellen. Die erreichbare Genauigkeit der Dämpfung hängt sehr stark vom Filtertyp und vom Grad der charakteristischen Funktion, d. h. von der Flankensteilheit, ab. Als Anhaltspunkte können folgende Ergebnisse dienen: Bei einem Tiefpaß 17. Grades wurde mit den rekursiven Formeln die max. Dämpfung im Durchlaßbereich noch auf 4 Dezimalstellen genau. Die Produktmethode ergab bei einem Tiefpaß 51. Grades entsprechend noch 8 genaue Dezimalstellen. Während dabei die Rechenzeit bei den rekursiven Formeln nur Bruchteile einer Sekunde betrug, wurden bei der Produktmethode ca. 2 min. Rechenzeit benötigt.

Da die hier angegebenen Approximationsverfahren u. a. auch als Ausgangspunkt für die nachfolgende Optimierung dienen und in diesem Zusammenhang später noch Ergebnisse beschrieben werden, sollen hier nur zwei Beispiele gebracht werden:

1. Eine Bandpaß-Approximation mit unsymmetrischem Dämpfungsverlauf in den beiden Sperrbereichen und einer ungeraden Anzahl von Einheitselementen (Bild 2.6). Das Bandpaßfilter ist ein symmetrisches Filter.
2. Eine Kombination von Bandsperr-Approximation Typ 1 und Typ 2 (Bild 2.7). Die Verwendung der Bandsperr-Approximation Typ 1 hat hier den Vorteil, daß zu den

Dämpfungsstellen bei $p_i = \pm \sigma_\infty$ (z. B. Einheitselemente) automatisch Dämpfungsstellen bei $p_i' = \pm j\omega_\infty'$ ergänzt werden, die natürlich zu einer höheren Dämpfung im Sperrbereich führen als Dämpfungsstellen bei $p_i' = \pm \sigma_\infty'$ (Typ 2). Das Bandsperrfilter ist ein antisymmetrisches Filter.

In beiden Beispielen haben die Lösungen den für Tschebyscheff-Approximationen charakteristischen gleichrippigen Dämpfungsverlauf im Durchlaßbereich.

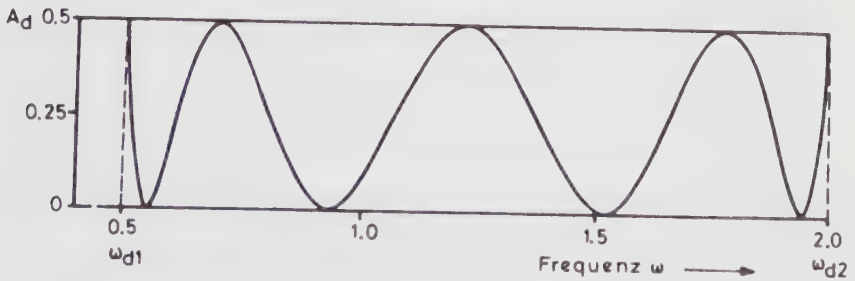
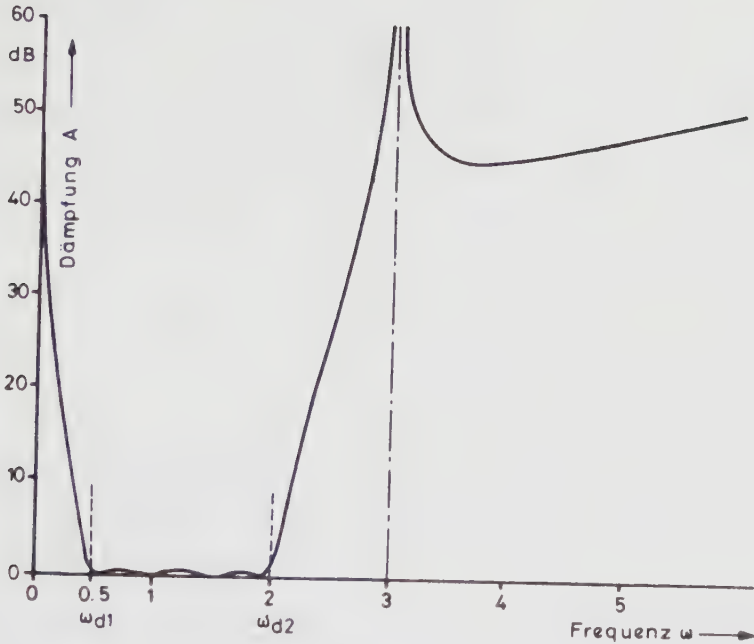


Bild 2.6 Beispiel für Bandpaß-Approximation
mit $n=8, m=2, \omega_{d1}=0.5, \omega_{d2}=2.0$ und $A_d=0.5$ dB

Nullstellen des f_0 -Polynoms:

$$\pm j \begin{matrix} 3.0 \\ 0.0 \end{matrix}$$

Zahl der Einheits Elemente:

$$k=3$$

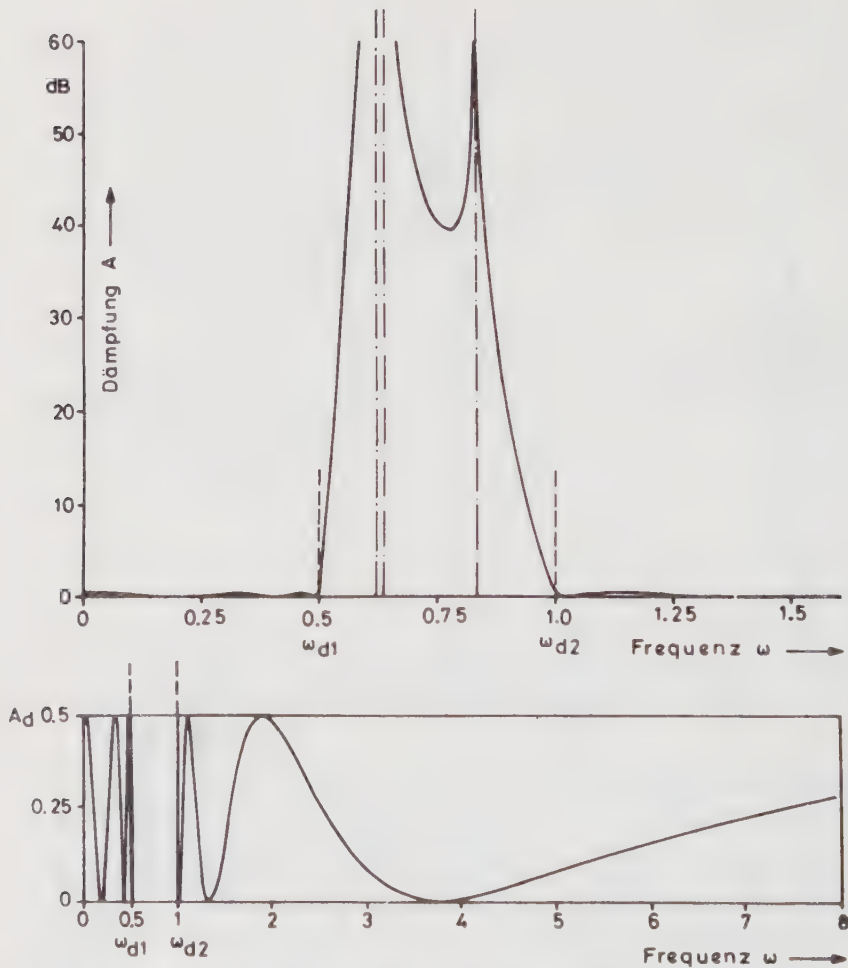


Bild 2.7 Beispiel für Kombination von
Bandsperr-Approximationen Typ 1 und Typ 2
mit $n=12$, $\omega_{d1}=0.5$, $\omega_{d2}=1.0$ und $A_d = 0.5$ dB

Nullstellen des f -Polynoms:

frei gewählt:

- $\pm j 0.6$
- ± 1.0
- ± 1.0

ergänzt:

- $\pm j 0.83$ (Typ2)
- $\pm j 0.6325$ (Typ1)
- $\pm j 0.6325$ (Typ1)

2.3 Tschebyscheff-Approximation im Durchlaß- und Sperrbereich

2.3.1 Beschreibung des Approximationsproblems

Läßt man die in Kap. 2.2.1 gemachte Einschränkung, daß die Pole der charakteristischen Funktion K fest vorgegeben sind, nun fallen, so erhält man folgendes Approximationsproblem: Man approximiere für $p = j\omega$ eine Funktion $K_0(p)$ im Tschebyscheff'schen Sinne in einem Bereich B der ω -Achse durch

$$K(p) = \frac{\sum_{i=0}^{gh} A_i p^i}{(1-p^2)^{k/2} \prod_{i=0}^{gf} C_i p^i} \quad . \quad (2.146)$$

Dies führt analog zu Kap. 2.2.3 auf ein nichtlineares Approximationsproblem mit der Norm

$$\max_{\omega \in B} \left| |K_0(p)| - |K(A,C,p)| \right|, \quad p = j\omega \quad . \quad (2.147)$$

Approximiert man statt dessen $C_0 = |K_0|^2$ durch $|K|^2$, so ergibt sich ein gewöhnliches rationales Approximationsproblem, jedoch mit der nichtlinearen Nebenbedingung

$$KK_* \geq 0 \quad , \quad p = j\omega \quad \text{und} \quad -\infty \leq \omega \leq +\infty \quad . \quad (2.148)$$

Selbst ohne Nebenbedingungen ist aber bei der rationalen Approximation die Existenz, Eindeutigkeit und Charakterisierung der Lösungen nur unter stark einschränkenden Voraussetzungen gegeben [25,27]. Zu diesen Voraussetzungen gehört u. a. die Polfreiheit im Bereich B .

Besondere Schwierigkeiten ergeben sich in diesem Zusammenhang bei der Approximation der Dämpfung Null im Durchlaßbereich und der Dämpfung Unendlich im Sperrbereich. Für klassische Tief-

paßfilter wurde die Lösung dieses Approximationsproblems von Cauer und Darlington mit Hilfe von elliptischen Funktionen beschrieben [28,39]. Die von Cauer angegebenen Ergebnisse beruhen auf Arbeiten von Zolotarev und Tschebyscheff. Für Einheitselementfilter bzw. Filter mit zum Teil festen Polen läßt sich keine geschlossene Lösung angeben. Allgemein kann man dieses Approximationsproblem als eine Kombinations-Approximation betrachten. Ist B_1 durch das Intervall $[-\omega_d, \omega_d]$ und B_2 durch das Intervall $[\omega_s, -\omega_s]$ gegeben, so versucht man,

$$\text{Max} \left| \max_{\omega \in B_1} |K(A, C, p)|, \max_{\omega \in B_2} \left| \frac{1}{K(A, C, p)} \right| \right|, \quad p = j\omega \quad (2.149)$$

möglichst klein zu machen. Zur Lösung dieser Aufgabe kann man Optimierungsverfahren oder sukzessive Approximationsverfahren verwenden.

2.3.2 Näherungsverfahren zur Approximation der Dämpfung Null im Durchlaßbereich und der Dämpfung Unendlich im Sperrbereich bei Tiefpaßfiltern

Aus der Formulierung als Kombinations-Approximation (2.149) ergibt sich ein sukzessives Approximationsverfahren. Man löst zunächst für beliebig angenommene freie Dämpfungspole das Tiefpaß-Approximationsproblem für $K_1 = K(A, p)$ auf B_1 und anschließend das Hochpaß-Approximationsproblem für $1/K_1 = K_2 = K'(C, p)$ auf B_2 ; die Dämpfungspole des Hochpasses ergeben sich dabei aus den Nullstellen von K_1 . Dann berechnet man aus den Nullstellen von K_2 wieder neue Dämpfungspole für K_1 und setzt dieses Austauschverfahren so lange fort, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Dieses sukzessive Approximationsverfahren wurde von Ikeno für klassische Tiefpaßfilter entwickelt [42], hierfür

existieren jedoch geschlossene Lösungen. Anstelle der Hochpaß-Approximation kann man natürlich auch mit $p' = 1/p$ eine äquivalente Tiefpaß-Approximation von $K_3 = K'(C, 1/p')$ auf dem Intervall $[-1/\omega_s, 1/\omega_s]$ durchführen. Dieses letztere Verfahren soll hier angewendet werden, da man dann nur eine Methode zur Tiefpaß-Approximation benötigt. Die Übertragung auf Einheitselementfilter bereitet Schwierigkeiten, da im Zähler von K_3 ein fester Faktor $\sqrt{1-p^2}^{k/2}$ auftritt; Entsprechendes gilt für feste Pole von K_1 , die zu festen Nullstellen bei K_3 werden. Für diesen Fall sind keine geschlossenen Lösungen bekannt.

Von Bernstein wurde eine Methode zur näherungsweisen Tschebyscheff-Approximation der Null durch Polynome im Intervall $[-1, 1]$ mit zum Teil festen Nullstellen entwickelt. Die festen Nullstellen müssen außerhalb des Intervalls $[-1, 1]$ liegen. Es handelt sich hierbei um eine asymptotische Lösung, die für $n \rightarrow \infty$ exakt gilt. Hierbei ist $n-q$ die Zahl der für die Approximation noch frei verfügbaren Nullstellen [24]. Diese Methode läßt sich ohne besondere Einschränkungen auf rationale Funktionen mit festen Nullstellen und sogar auf Funktionen der Form K_3 verallgemeinern. Die Ableitung des Verfahrens erfolgt analog zu dem von Bernstein für Polynome angegebenen. Die charakteristische Funktion K wird wie folgt aufgebaut (Definition von m siehe Gl. 2.24)

$$K(p) = \frac{P(p)}{N(p)Q(p)} = \text{ch} \left(\sum_{i=1}^n \psi_i \cdot - \sum_{i=1}^q \psi_{oi} \right) \quad (2.150)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} N(p) &= \prod_{i=1}^{n-m} \sqrt{p^2 - p_i^2} \\ Q(p) &= \prod_{i=1}^q \sqrt{p^2 - p_{oi}^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.151)$$

und φ_i, φ_{oi} nach (2.62). Nach einer Umformung folgt

$$\begin{aligned}
 K(p) = \frac{1}{2} [& (ch\varphi_1 + sh\varphi_1) (ch\varphi_2 + sh\varphi_2) \cdots (ch\varphi_n + sh\varphi_n) \cdot \\
 & \cdot (ch\varphi_{o1} - sh\varphi_{o1}) (ch\varphi_{o2} - sh\varphi_{o2}) \cdots (ch\varphi_{oq} - sh\varphi_{oq}) + \\
 & + (ch\varphi_1 - sh\varphi_1) (ch\varphi_2 - sh\varphi_2) \cdots (ch\varphi_n - sh\varphi_n) \cdot \\
 & \cdot (ch\varphi_{o1} + sh\varphi_{o1}) (ch\varphi_{o2} + sh\varphi_{o2}) \cdots (ch\varphi_{oq} + sh\varphi_{oq})] .
 \end{aligned} \quad (2.152)$$

Nach Kap. 2.2.4.1 wächst für die so erhaltene Funktion $K(p)$ das Argument φ von (2.48) im Intervall $[-1, 1]$ monoton um genau $(n-q) \cdot j\pi$ an. Es gelten mit (2.51) die Beziehungen

$$ch\varphi_i - sh\varphi_i = \frac{1}{ch\varphi_i + sh\varphi_i} \text{ bzw. } ch\varphi_{oi} - sh\varphi_{oi} = \frac{1}{ch\varphi_{oi} + sh\varphi_{oi}}. \quad (2.153)$$

Geht man zunächst davon aus, daß die p_{oj} nur einfach auftreten, so kann man die zu $Q^2(p)$ gehörenden Partialbrüche von $P(p)/[N(p)Q^2(p)]$ folgendermaßen abspalten

$$\begin{aligned}
 \frac{P(p)}{N(p)Q^2(p)} = \sum_{j=1}^q \left(\frac{P(p_{oj})}{N(p_{oj})Q_j^2(p_{oj})} \frac{1}{p-p_{oj}} + \frac{P(-p_{oj})}{N(-p_{oj})Q_j^2(-p_{oj})} \frac{1}{p+p_{oj}} \right) + \\
 + \frac{S(p)}{N(p)}. \quad (2.154)
 \end{aligned}$$

Hierin ist $S(p)$ ein Polynom vom Grad $n-q$ und

$$Q_{\pm j}^2(p) = \frac{Q_j^2(p)}{p \mp p_{oj}}. \quad (2.155)$$

Aus (2.153) folgt mit (2.62) $[ch\varphi_{oj} - sh\varphi_{oj}]_{p=\pm p_{oj}} = 0$, damit der erste Summand in (2.152) an den Stellen $p = \pm p_{oj}$, $j = 1, 2, \dots, q$ immer Null. Es bleiben noch n Faktoren der Form $[ch\varphi_i - sh\varphi_i]_{p=\pm p_{oj}}$

abzuschätzen. Mit der Definition von $\sqrt{z}$ gemäß Kap. 2.2.4.1 und unter der Annahme, daß für $-p_{oj}$ auch $-\sqrt{z}$ zu nehmen ist, gilt

$$\left| \left[\text{ch}\varphi_i - \text{sh}\varphi_i \right]_{p=\pm p_{oj}} \right| = \left| \frac{\sqrt{p_{oj}^2 - p_i^2}}{\sqrt{p_i^2 + 1} \, p_{oj} + p_i \, \sqrt{p_{oj}^2 + 1}} \right| . \quad (2.156)$$

Falls man

$$\left| \left[\text{ch}\varphi_i - \text{sh}\varphi_i \right]_{p=\pm p_{oj}} \right| = \frac{1}{R_{i,j}} = 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const.} > 0, \quad (2.157)$$

voraussetzen kann²⁾, so folgt für $p \neq \pm p_{oj}$, daß der Partialbruchanteil von $P/(N \cdot Q^2)$ mit q/R^n gegen Null geht. Hierbei ist $R = \min_{i,j} R_{i,j}$. Es gilt dann also für $n \rightarrow \infty$

$$K(p) = \frac{S(p) \cdot Q(p)}{N(p)} . \quad (2.158)$$

Für $p_i = \infty$ und p_{oj} beliebig gilt

$$\left| \left[\text{ch}\varphi_i - \text{sh}\varphi_i \right]_{p=\pm p_{oj}} \right| = \left| \frac{1}{p_{oj} + \sqrt{p_{oj}^2 + 1}} \right| . \quad (2.159)$$

Dieser Ausdruck ist immer kleiner als Eins [24]. Eine Verallgemeinerung auf mehrfache p_{oi} bereitet keine Schwierigkeiten. Eine genauere Abschätzung von (2.154) für beliebige p_i und p_j ist sehr schwierig. Bei einer großen Zahl von berechneten Beispielen hat sich jedoch gezeigt, daß man schon für relativ niedriges n günstige Näherungslösungen erhält.

Wahrscheinlich ohne Kenntnis der Arbeiten von Bernstein ist von Horton und Wenzel ein ähnliches sukzessives Approximationsverfahren benutzt worden [33]. Als Begründung für das Minuszeichen in (2.150) wurde angegeben, daß sich bei festen Nullstellen die

2) siehe Anhang A1

Zahl der Dämpfungsrippel im Durchlaßbereich verringern muß.

Hat K_1 feste Pole bei Unendlich, so treten in K_3 feste Nullstellen bei Null auf, diese muß man durch $p_{oi} = 0,1$ oder $0,01$ usw. annähern, da feste Nullstellen im Durchlaßbereich nicht zulässig sind. Horton und Wenzel ließen bei ihrem Verfahren nur Einheits-elemente und feste Pole im Unendlichen zu. Die festen Pole p_{oi} im Unendlichen bei K_1 wurden fälschlicherweise zu festen Nullstellen $p_{oi} = 0$ bei K_2 ($p_{oi} = \infty$ bei K_3), hierdurch traten zusätzliche Ungenauigkeiten auf.

2.3.3 Ergebnisse und Beispiel

Das sukzessive Approximationsverfahren wurde bei einer großen Zahl von Filtern mit Einheits-elementen bzw. mit festen Polen erfolgreich durchgeführt. Die Austauschzahl z steigt mit der Filtersteilheit an. Die Genauigkeit der Näherungslösungen ist so gut, daß in der Praxis kaum weitere iterative Verbesserungen erforderlich sein werden. Für Cauer-Filter ist die Lösung im Rahmen der Rechengenauigkeit exakt.

Bei einem Tiefpaßfilter 9. Grades mit $m = 3$ festen Polen im Unendlichen wurde die Dämpfung Null im Durchlaßbereich und die Dämpfung Unendlich im Sperrbereich sukzessiv approximiert. Während die Approximation im Durchlaßbereich genau ist, ergibt sich im Sperrbereich eine Näherungslösung (Bild 2.8). Man erkennt deutlich die verbesserte Genauigkeit gegenüber dem Verfahren von Horton und Wenzel. Insgesamt war die Austauschzahl bis zum Abbruch des Verfahrens aufgrund der endlichen Rechengenauigkeit nur $z = 4$. Die Rechenzeit betrug 1,4 Sekunden; sie wurde fast vollständig bei der Suche der Nullstellen von K_3 verbraucht. Bei der Approximation von K_3 ist $q=2$ zu nehmen, da wegen n ungerade sowieso immer eine Nullstelle bei Null auftritt.

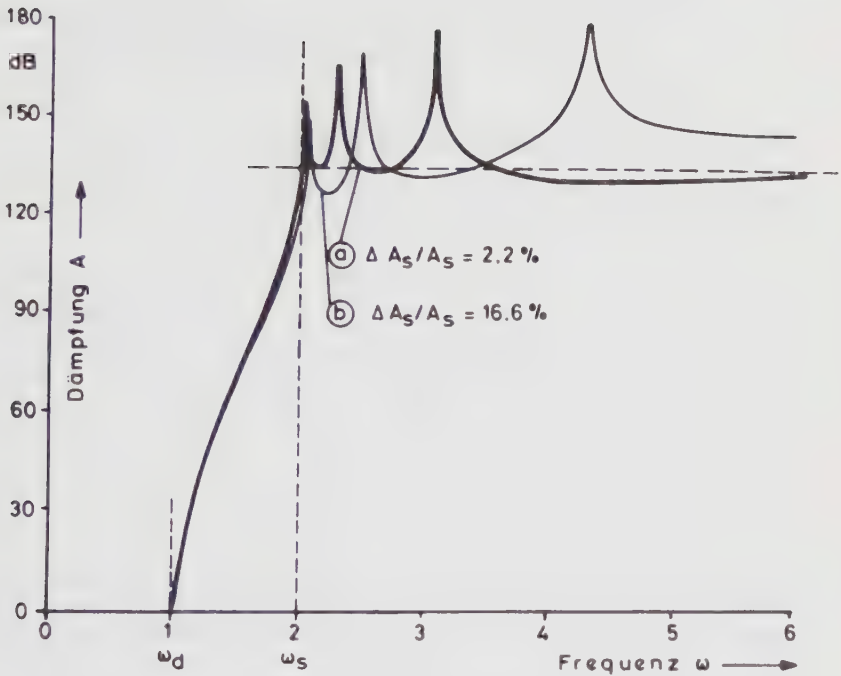


Bild 2.8 Beispiel für angenäherte Tschebyscheff - approximation im Sperrbereich bei Filtern mit mehrfachen Dämpfungspolen bei $p=\infty$ mit $n=9, m=3, \omega_d=1, \omega_s=2$ und $A_d=0.5$ dB

(a) $p_{\infty i} = \infty \longrightarrow p_{oi} = 0.1$

(b) $p_{\infty i} = \infty \longrightarrow p_{oi} = \infty$ (Horton und Wenzel)

Def.:

$$\Delta A_S = \max_{\omega_s \leq \omega_l < \infty} |A(\omega_l) - A_S|$$

$$A_S = A(\omega_s)$$

$\omega_l \triangleq$ Dämpfungsminima im Sperrbereich

3. Filterberechnungsverfahren

3.1 Berechnung des Polynoms g

Vor der Berechnung von Bauelementewerten eines Filters muß man zunächst das Polynom g bestimmen. Wenn die charakteristische Funktion $K(p)$ (2.21) bekannt ist, so sind auch h und f gegeben. Die Bestimmung von g besteht dann hauptsächlich nur noch in der Lösung der sich aus (2.4) ergebenden Gleichung

$$hh_{\star} + ff_{\star} = 0 \quad (3.1)$$

Enthält das Filter nur eine gerade Anzahl von Einheitselementen, so ist f ein Polynom. Man kann dann für (3.1) bei symmetrischen Filtern $h^2 - f^2 = 0$ bzw., nach einer Faktorisierung,

$$\left. \begin{array}{ll} h + f = 0 & \text{a)} \\ h - f = 0 & \text{b)} \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

schreiben. Es genügt, eine einzelne dieser Gleichungen aufzulösen, da (3.2a) in (3.2b) übergeht, falls p durch $-p$ ersetzt wird. Bei antimetrischen Filtern kann (3.1) in der Form $h^2 + f^2 = 0$ bzw.

$$\left. \begin{array}{ll} h + jf = 0 & \text{a)} \\ h - jf = 0 & \text{b)} \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

geschrieben werden. Auch hier genügt es, eine einzelne Gleichung aufzulösen, da $[h(p) + jf(p)]^{\star} = h(p^{\star}) - jf(p^{\star})$ ist. Sind $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ Lösungen von (3.2) bzw. (3.3), so ergeben sich die Nullstellen des Polynoms g zu

$$p_{gi} = -|\sigma_i| + j\omega_i \quad (3.4)$$

da g ein Hurwitzpolynom ist. Die Konstante in der Produktform

von g ergibt sich bis auf ein frei wählbares Vorzeichen aus (2.4) für $p \rightarrow \infty$. Enthält das Filter eine ungerade Anzahl von Einheitselementen oder ist das Filter weder symmetrisch noch antimetrisch, so muß (3.1) selbst gelöst werden.

In (3.2a) ist $h + f$ ein reelles Polynom in p vom Grad $n = \text{Grad des Polynoms } g$; $h + jf$ in (3.3a) ist ein gerades Polynom vom Grad n . Aus (3.1) ergibt sich, daß $gg_* = hh_* + ff_*$ ein reelles gerades Polynom vom Grad $2n$ ist. Diese Eigenschaften kann man nun ausnutzen, um den Rechenaufwand zu verringern, da bei reellen Polynomen zu jeder Nullstelle mit $\text{Im}\{p_i\} \neq 0$ ein $p_j = p_i^*$ auftritt und bei geraden Polynomen zu jeder Nullstelle p_i ein $p_j = -p_i$ hinzukommt. Insgesamt sind deshalb in den meisten Fällen nur ca. $n/2$ Nullstellen zu berechnen. Bei geraden Polynomen wendet man zweckmäßigerweise die Substitution $t = p^2$ an. Benutzt man ein Verfahren zur Berechnung der Nullstellen in (3.1) - (3.3), bei dem die auftretenden Polynome in Koeffizientenform eingehen, so ergeben sich bei Filtern höheren Grades, speziell bei der Lösung von (3.1), leicht numerische Ungenauigkeiten. Es ist dann auch hier möglich, die Polynome in Produktform darzustellen und ein Verfahren zur Addition von Polynomen in Produktform anzuwenden.

Die numerische Genauigkeit der so erhaltenen Verfahren zur Berechnung des Polynoms g entspricht der in Kap. 2.2.4.7 für die Approximationsverfahren angegebenen. Hier gilt jedoch, daß die Rechenzeiten beim Koeffizientenverfahren und bei der Produktmethode in etwa gleich sind. Bei einem Tiefpaß 41. Grades betrug die Rechenzeit ca. 16 Sekunden (TR 440).

3.2 Berechnung der Bauelemente

Faktorisierung der Transfermatrix [40,47]: Die Faktorzerlegung der Transfermatrix $\underline{T}$ von verlustfreien Zweitoren läßt sich auf mathematisch exakte Weise durchführen. Sie ist nicht nur für Reaktanzzweitore möglich, sondern auch für allgemeinere verlustfreie Zweitore, die z. B. Gyratoren und Einheitselemente enthalten. Mit Hilfe dieser Faktorzerlegung ist die Synthese von Kettenschaltungen durchführbar. Das Problem der Faktorisierung besteht aus folgender Grundaufgabe: Gegeben sei ein verlustfreies Zweitor N . Gesucht werden zwei verlustfreie Zweitore N_a und N_b , deren Kettenschaltung dem ursprünglichen Zweitor N äquivalent ist. Die Aufspaltung soll so erfolgen, daß die Dämpfungspole von N , d. h. die Nullstellen von f_0 sowie die weiteren Übertragungsnullstellen von N bei $p = \infty$ bzw. $p = \pm 1$, in genau vorgeschriebener Weise auf N_a und N_b aufgeteilt werden. Im Gegensatz zu den zur Zeit in der Praxis überwiegend benutzten Verfahren zur Berechnung von Kettenschaltungen, bei denen, ausgehend vom Ein- oder Ausgang, sukzessiv Elementarzellen (Elementarzweitore) abgespalten werden, ist es hier auch möglich, alle Bauelemente einer Kettenschaltung durch max. zwei aufeinanderfolgende Rechenschritte zu bestimmen. Hierin liegt der Vorteil dieses Verfahrens, obwohl die Programmierung dieser Zerlegungen etwas schwieriger durchzuführen ist, als bei der Abspaltung vom Ein- oder Ausgang [47]. Das Verfahren zur Faktorisierung der Transfermatrix gestattet nur kanonische Zerlegungen. Zur Realisierung einer bestimmten Filterstruktur sind daher nach der Zerlegung noch geeignete Transformationen vorzunehmen (Bild 3.1). Die Zerlegung von Brune-Zellen läßt sich nach einer von Cauer angegebenen Äquivalenz durchführen [28]. Bei Filtern mit Einheitselementen können noch Kuroda-Transformationen

(Bild 3.2) erforderlich sein, wenn Abzweigschaltungen gewünscht werden, bei denen die L,C-Bauelemente jeweils durch Einheitselemente voneinander getrennt sein sollen [42-43].

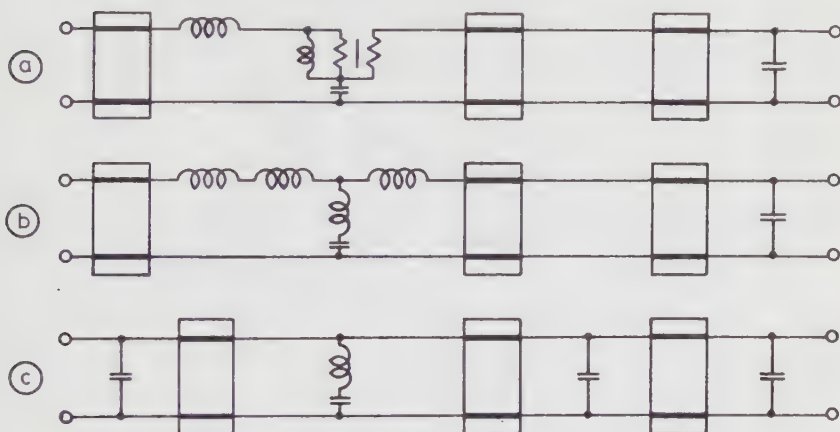


Bild 3.1 Prinzip der Berechnung von Abzweigschaltungen mit Hilfe der kanonischen Faktorisierung der Transfermatrix.

- (a) kanonische Zerlegung
- (b) nach Cauer-Transformation
- (c) nach Kuroda-Transformationen

Da das benutzte Berechnungsverfahren bei der Faktorzerlegung intern Gebrauch von Polynomen macht, die maximal den doppelten Grad des g -Polynoms haben können, ergeben sich bei der Darstellung der Polynome in Koeffizientenform und bei Filtern höheren Grades evtl. numerische Schwierigkeiten. Eine allgemeine Erweiterung der Faktorzerlegung auf Polynome in Produktform ist jedoch noch nicht durchgeführt worden. Mit der Koeffizientenmethode konnten Tiefpässe bis ca. 15. Grades und Bandpässe bis ca. 6. Grades berechnet werden. Die Rechenzeiten betrugen nur einige Sekunden (TR 440).

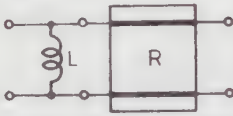
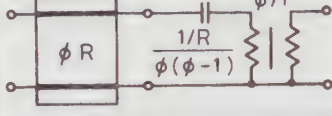
original	äquivalent	$\phi = 1+k$
		$1 + RC$
		$1 + \frac{R}{L}$
		$1 + \frac{1}{RC}$
		$1 + \frac{L}{R}$

Bild 3.2 Die wichtigsten Kuroda- Identitäten

Abspaltung aus der Betriebseingangsimpedanz: Eine klassische Methode bei der Synthese von Kettenschaltungen besteht in der Entwicklung der Eingangsimpedanz z eines mit einem Widerstand abgeschlossenen verlustfreien Zweitors. Es gilt

$$z = \frac{g + h}{g - h} \quad (3.4)$$

Dieses Verfahren ist auch gut geeignet für Polynome in Produktform [45-46]. Die Tatsache, daß z eine reelle rationale Funktion in p ist, läßt sich beim Algorithmus für die Addition von Polynomen in Produktform zur Verringerung der Rechenzeit ausnutzen. Im Gegensatz zu den Feststellungen von Thiran et. al. [46] war

es auch bei Filtern höheren Grades dann nicht nötig, die Unitaritäts-Beziehung (2.4) nach einer gewissen Zahl von Abspaltungen bzw. im Falle zu großer Imaginärteile der Bauelementwerte zu regenerieren. Die numerische Genauigkeit ist bei 10 Dezimalstellen des Rechners sicher ausreichend für Filter mit $n \leq 50$. Im Extremfall betrug die Rechenzeit bei einem Tiefpaß 41. Grades ca. fünf Minuten.

3.3 Addition von Polynomen in Produktform

Gesucht werden die Nullstellen einer Summe von zwei Polynomen in Produktform

$$\left. \begin{aligned} P(x) &= P_1(x) + P_2(x) \\ \text{mit} \quad P_\ell(x) &= k_\ell \prod_{i=1}^{n_\ell} (x - y_{\ell,i}) \quad , \quad i = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

wobei k_ℓ und $y_{\ell,i}$ komplex sein können. Hierzu kann man einen auf dem Newton-Verfahren beruhenden iterativen Algorithmus entwickeln, der große Ähnlichkeit mit der Nullstellensuche bei Polynomen in Koeffizientenform hat [79,46]. Da man hierbei eine gefundene Nullstelle nicht durch Division aus $P(x)$ entfernen kann, müssen Vorsichtsmaßnahmen gegen wiederholte Berechnungen derselben Nullstelle getroffen werden. Dies geschieht durch formale Division von $P(x)$ durch ein Polynom, das aus den schon gefundenen Nullstellen besteht. Allgemein ergibt sich nun das Problem, die Nullstellen der rationalen Funktion

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{P(x)}{P_0(x)} \\ \text{mit} \quad P_0(x) &= \prod_{i=1}^{n_0} (x - y_{0,i}) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

zu finden. Dabei sind $y_{0,i}$ die schon früher berechneten Nullstellen. Man überzeugt sich leicht, daß ein etwaiger Fehler von schon berechneten Nullstellen $y_{0,i}$, $1 \leq i \leq n_0$ keinen Einfluß auf die Genauigkeit aller anderen Nullstellen hat. Aufgrund des Newton-Verfahrens können mehrfache Nullstellen nur mit verringerter Genauigkeit gefunden werden. Bei einem in der Programmiersprache FORTRAN geschriebenen Programm reichten 5 - 20 Iterationen zur Bestimmung von einfachen Nullstellen aus.

4. Optimierungsverfahren

4.1 Allgemeines Verfahren

Wellendigitalfilter bestehen aus n -Tor Blöcken, sogenannten Adaptoren und Elementen [9,13]. Es werden klassische Elemente wie Kapazitäten, Induktivitäten, Einheitselemente und Widerstände digital nachgebildet. Die Adaptoren werden zur Zusammenschaltung digitaler Elemente mit unterschiedlichen Torwiderständen benötigt; sie enthalten Multiplizierer und Addierer. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß die Adaptoren die einzigen Blöcke sind, die Multiplizierer enthalten. Ein Adaptor hat n Tore, mit $n \geq 2$, die man mit $v = 1, 2, \dots, n$ numerieren kann. Zu jedem Tor gehört ein positiver Torwiderstand R_v . Die R_v hängen von den Bauelementewerten des Referenzfilters, aus dem das Digitalfilter abgeleitet wird, und von der Struktur des Digitalfilters ab. Der n -Tor Adaptor selbst entspricht einem n -Tor des Referenzfilters mit den Torwiderständen R_v . Mit a_v und b_v bezeichnet man die Augenblickswerte der Wellengrößen.

Ein Paralleladaptor [9] dient zur Parallelschaltung von n Toren [Bild 4.1(a)]. Die Multiplizierer-Koeffizienten berechnen sich aus den Gleichungen

$$\alpha_v = 2G_v/G, \quad G_v = 1/R_v \quad (4.1a,b)$$

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad (4.2)$$

Ein Serienadaptor [9,13] dient zur Serienschaltung von n Toren [Bild 4.1(b)]. Die Multiplizierer-Koeffizienten berechnen sich aus den Gleichungen

$$\alpha_v = 2R_v/R \quad (4.3)$$

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (4.4)$$

In beiden Fällen genügen die α_v den Beziehungen

$$\alpha_v > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 2 \quad (4.5a,b)$$

Aufgrund von (4.5b) kann ein α_v , z. B. α_n , eliminiert werden.

Ein n-Tor Adaptor erfordert dann nur n-1 Multiplizierer. Tor n nennt man dann abhängiges Tor.

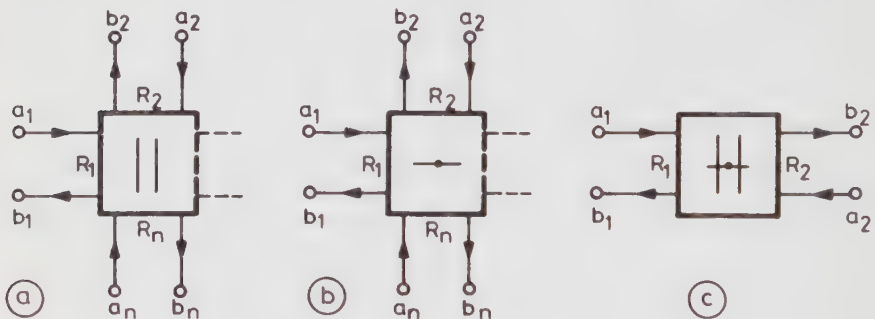


Bild 4.1 Schematische Darstellung der Adaptoren

(a) n-Tor Paralleladaptor

(b) n-Tor Serienadaptor

(c) Zweitor adaptor

Hierbei ist klar, daß für $n = 2$ beide Adaptoren - bis auf einen normalerweise irrelevanten idealen Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis $-1 : 1$ - äquivalent sind. Es ist jedoch zu beachten, daß die Realisierung des Zweitoradaptors in [9] auf eine andere Weise durchgeführt wurde. Der Multiplizierer-Koeffizient dieses symmetrischen Zweitor-Paralleladaptors [Bild 4.1(c)] ist gegeben durch

$$\alpha = (G_2 - G_1) / (G_2 + G_1) \quad (4.6)$$

$$|\alpha| < 1 \quad (4.7)$$

Für Zwecke der Empfindlichkeitsberechnung wird später noch der entsprechende symmetrische Zweitor-Serienadaptor benötigt. Der Multiplizierer-Koeffizient ist gegeben durch

$$\alpha = (R_2 - R_1) / (R_2 + R_1) \quad (4.8)$$

$$|\alpha| < 1 \quad (4.9)$$

Es gelten folgende Adaptor-Gleichungen:

n-Tor Paralleladaptor

$$b_n = a_n - \sum_{v=1}^{n-1} \alpha_v (a_n - a_v), \quad b_v = b_n + (a_n - a_v), \quad (4.10a, b)$$

$$v = 1, 2, \dots, n-1, \quad ,$$

n-Tor Serienadaptor

$$\left. \begin{aligned} b_n &= -(b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + a_0), \quad b_v = a_v - \alpha_v a_0, \\ a_0 &= a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad v = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (4.11a, b, c)$$

Zweitor-Paralleladaptor (P)

$$b_1 = a_2 + \alpha(a_2 - a_1), \quad b_2 = a_1 + \alpha(a_2 - a_1)$$

Zweitor-Serienadaptor (S)

$$b_1 = -a_2 + \alpha(a_2 + a_1), \quad b_2 = -a_1 - \alpha(a_2 + a_1)$$

(4.12a, b)

Die Zahl der Multiplizierer kann weiter verringert werden, falls einige der α_v gleich sind, d. h. einige der R_v gleich

sind $|9|$. Dies erfordert jedoch die Entwicklung von speziellen Optimierungsverfahren, um die geforderten Nebenbedingungen zu erfüllen, da das klassische Filterberechnungsverfahren dann nicht mehr unmittelbar anwendbar ist. Die Frage ist, ob solch ein Optimierungsverfahren allgemein durchführbar ist und ob es zu brauchbaren Filtern führt. Entscheidend ist hierbei, daß die Sperrdämpfung gegenüber dem Filter mit voller Zahl von Freiheitsgraden nur unwesentlich abnimmt. Eine zusätzliche Verringerung des Multipliziereraufwands (Koeffizientenwortlänge bzw. Zahl der Addierer) ergibt sich, wenn einige der α_v gleich 2^{-i} bzw. gleich $2^{-i} + 2^{-j}$, i und j ganze Zahlen, sind. Aus Gründen der Vereinfachung soll im folgenden hauptsächlich nur der Fall der Tiefpaßfilter mit resistivem Abschluß behandelt werden, der eine sehr wichtige Klasse von Filtern darstellt.

4.2 Abzweigschaltungen mit entkoppelnden Einheitselementen

4.2.1 Grundlagen der Optimierung

Um die Realisierbarkeitsbedingung für das sich ergebende Signalfluß-Diagramm eines Wellendigitalfilters zu erfüllen, muß jede geschlossene Schleife mindestens eine Verzögerung T enthalten $|9,15|$; $1/T$ ist hierbei die Abtastrate. Eine Möglichkeit, diese Bedingung zu erfüllen, ist dadurch gegeben, daß man direkte Verbindungen von Adaptoren vermeidet. Für ein Referenzfilter in Abzweigschaltung erfordert dies die Verwendung von entkoppelnden Einheitselementen. Ein Beispiel für solch ein Filter ist im Bild 4.2 gegeben. Hierin sind A_v und B_v komplexe Wellengrößen. Die komplexe Frequenz Ψ und die zugehörige Frequenz φ sind durch (2.9) bzw. (2.10) definiert.

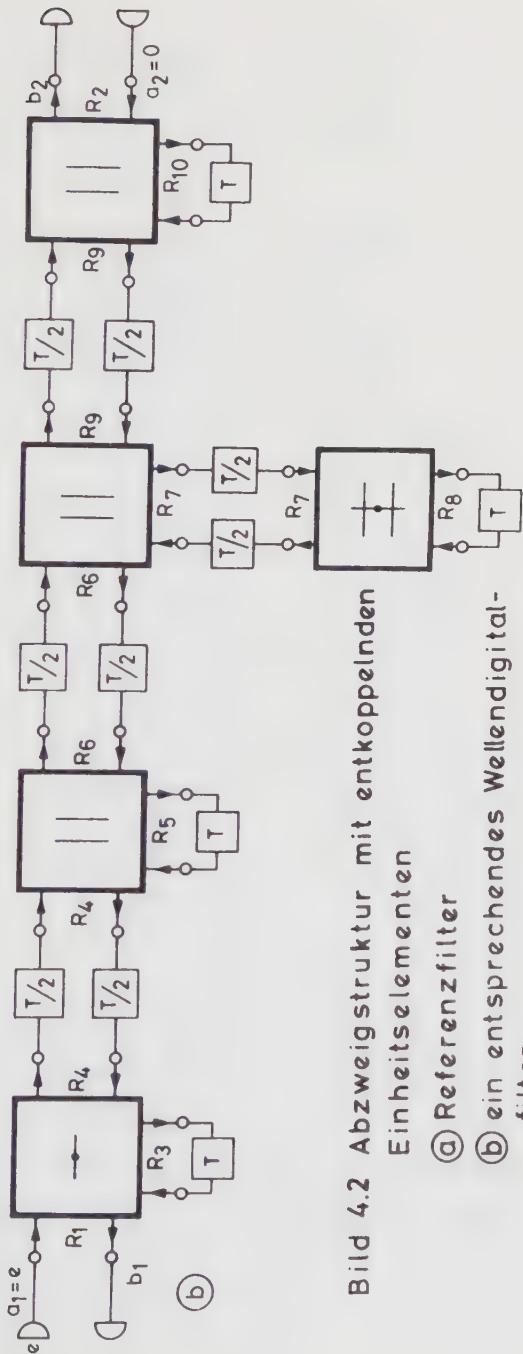
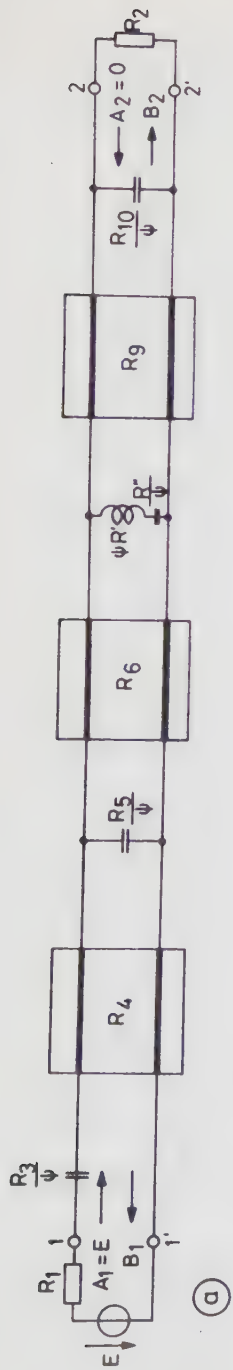


Bild 4.2 Abzweigstruktur mit entkoppelnden
Einheitselementen
a) Referenzfilter
b) ein entsprechendes Wellendigital-
filter

Die Parameter R_j bestehen aus den charakteristischen Impedanzen der Einheitselemente und aus den Widerstandsparametern für Kapazitäten $1/C_j$ und Induktivitäten L_j .

Es ist bekannt, daß es nicht nötig ist, die zwei Verzögerungen $T/2$ eines Einheitselements getrennt zu realisieren, da man jedes Einheitselement durch eine quasireziproke Leitung (QUARL) mit der Verzögerung $(T,0)$ ersetzen kann, ohne die Dämpfung des Filters zu ändern [9,11,76]. Da die Filterwirkung von in Kette geschalteten Einheitselementen geringer ist, als die von Kapazitäten und Induktivitäten, soll die Zahl der verwendeten Einheits-elemente so niedrig wie möglich gehalten werden. Dies ist besonders wichtig bei Tiefpaßfiltern mit höheren Grenzfrequenzen, da die Filterwirkung der Einheitselemente dann stark abnimmt. Aus Kap. 4.1 ist bekannt, daß die Zahl der erforderlichen Multiplizierer sich um Eins reduziert, falls man in der Lage ist, den Widerstand eines Einheitselements gleich einem der Widerstände eines benachbarten Adaptors zu machen, z. B. gleich dem Widerstand eines weiteren in Kette geschalteten Einheitselements. Von dieser letzteren Möglichkeit soll hier hauptsächlich Gebrauch gemacht werden.

Betrachten wir nun zunächst symmetrische gleichripplige Tiefpaßfilter mit entkoppelnden Einheitselementen und ohne Dämpfungspole bei endlichen Frequenzen [Bild 4.3(a)]. Diese Filter sind struktursymmetrisch und haben darüber hinaus die Eigenschaft der Element-Symmetrie.

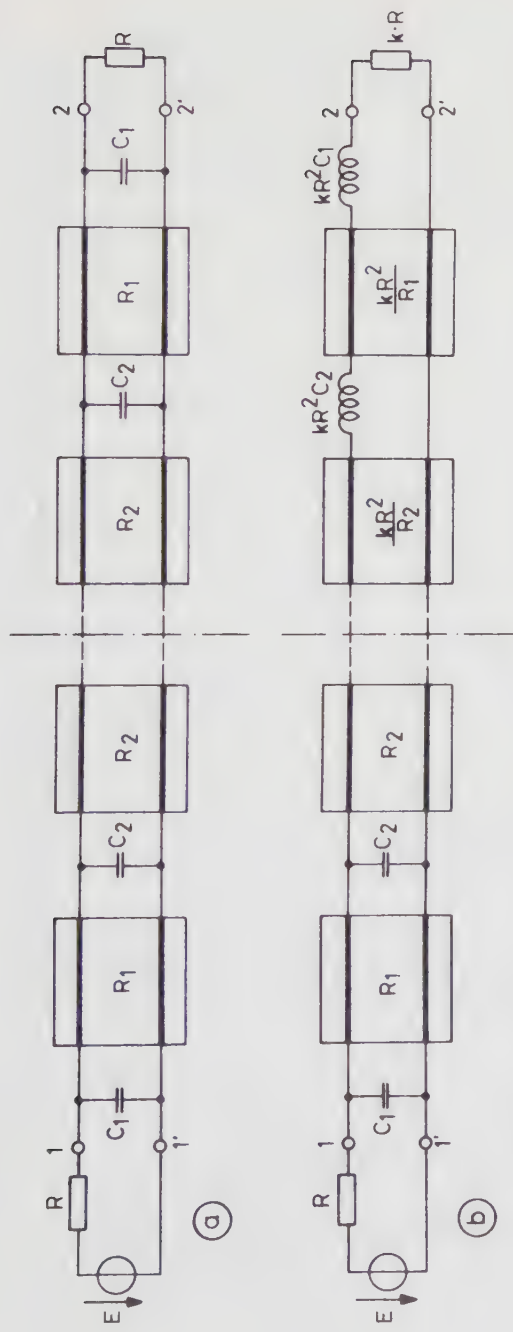


Bild 4.3 Tiefpaßfilter ohne Dämpfungspole bei endlichen Frequenzen

Ⓐ symmetrische Filter

Ⓑ antisymmetrische Filter (z.B.)

Als Beispiel sind die normierten Widerstandswerte $r_i = R_i/R$ ($i = 1,2$) der Einheitselemente für Filter 7. Grades über dem max. Betrag des Reflexionsfaktors ρ bzw. der max. Dämpfung im Durchlaßbereich A_d in dB mit der Grenzfrequenz φ_d als Parameter aufgetragen worden (Bild 4.4). Der Zusammenhang zwischen ρ und A_d ist gegeben durch

$$\rho = (1 - 10^{-A_d/10})^{1/2} \quad (4.13)$$

Die Kurven beweisen klar, daß sich die Widerstandswerte der Einheitselemente r_i für weite Bereiche von ρ und φ_d nur geringfügig voneinander unterscheiden. Äquivalente Filter 9. Grades zeigen das gleiche Verhalten (Bild 4.5). Eine große Zahl von berechneten Beispielen hat gezeigt, daß die gleiche Charakteristik auch für Filter höheren Grades und sogar für Filter mit Dämpfungspolen bei endlichen Frequenzen gültig ist. Dies entspricht in gewissem Sinn dem geringen Wertebereich der Bauelemente von klassischen LC-Abzweigfiltern [44]. Man kann nun die in Kap. 1 diskutierten günstigen Empfindlichkeitseigenschaften ausnutzen und alle Widerstandswerte r_i der Einheitselemente untereinander gleich setzen, während man die restlichen Freiheitsgrade verwendet, um das Filter wieder zu optimieren. Falls das Filter z Einheitselemente enthält, ist es allgemein möglich, die Zahl der Multiplizierer um $z-1$ zu verringern. Es zeigt sich sogar, wie man aus Bild 4.4 - 4.5 erkennt, daß es in einem begrenzten Bereich um $\varphi_d \approx 2$ möglich ist, noch zwei weitere Multiplizierer zu sparen, indem alle Widerstandswerte $r_i = 1$ gesetzt werden.

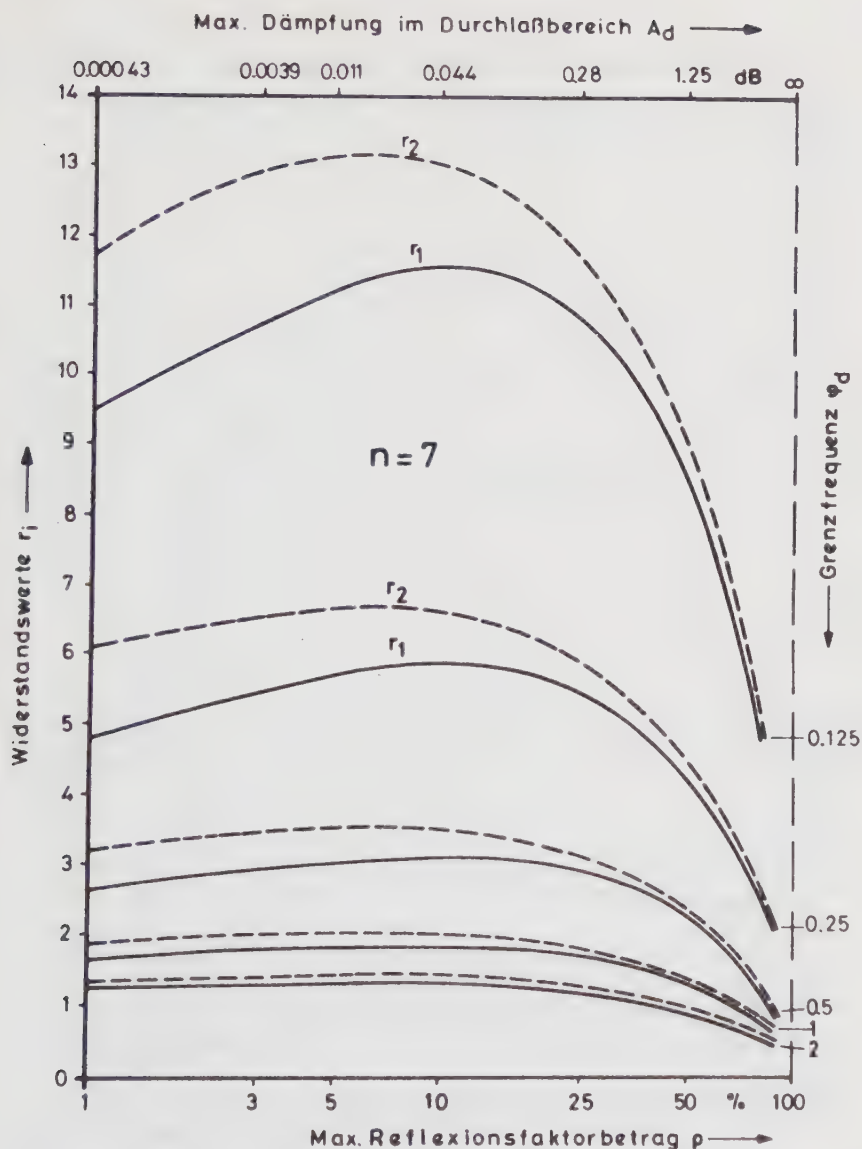


Bild 4.4 Widerstandswerte der Einzelelemente bei symmetrischen Tiefpaßfiltern 7 Grades ohne Dämpfungspole bei endlichen Frequenzen.

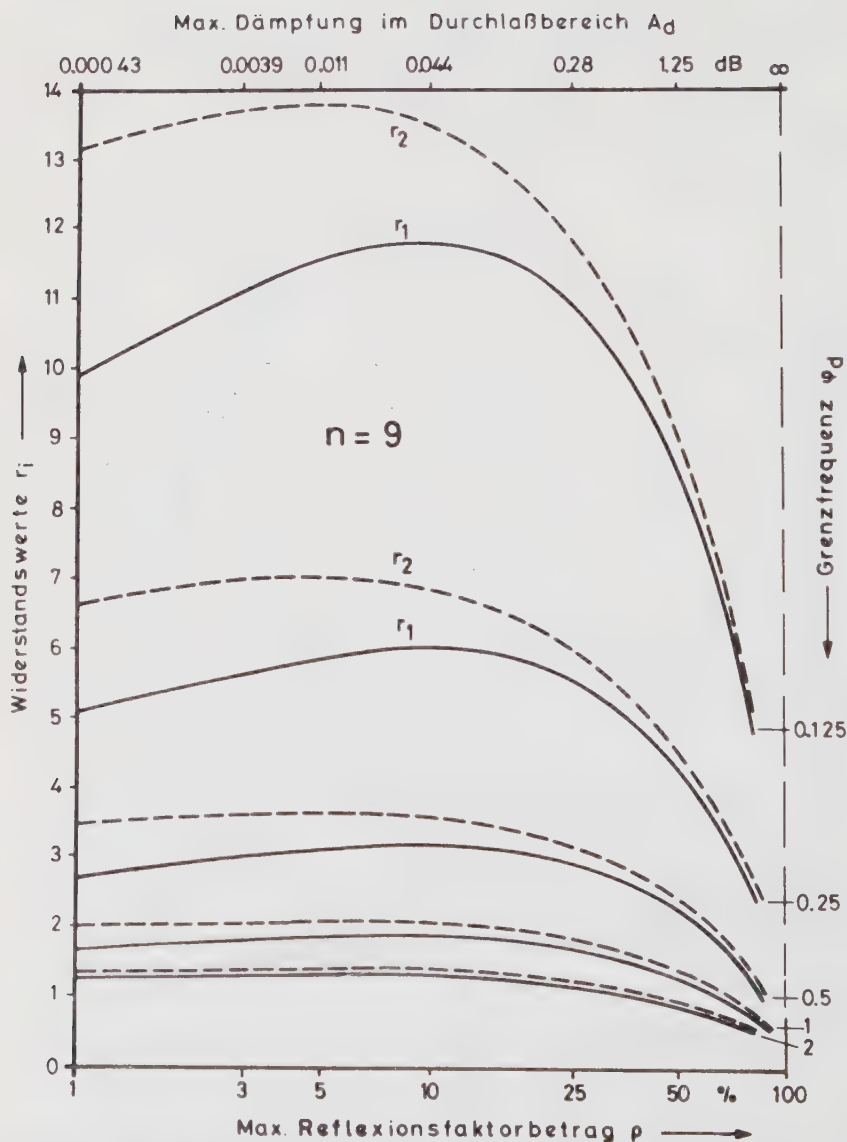


Bild 4.5 Widerstandswerte der Einzelelemente bei symmetrischen Tiefpaßfiltern 9. Grades ohne Dämpfungspole bei endlichen Frequenzen.

Bild 4.3(b) zeigt eine entsprechende antimetrische Tiefpaßfilter-Struktur. Die Konstante k ist gegeben durch

$$k = \frac{1-\rho}{1+\rho} \quad . \quad (4.14)$$

In diesem Fall ist es allgemein möglich, die Zahl der Multiplizierer um $z-2$ zu verringern. Im Gegensatz zu den symmetrischen Filtern von Bild 4.3(a) hat man nun die Möglichkeit, eine Anzahl von unterschiedlichen Strukturen aus Bild 4.3(b) zu entwickeln, indem man Kuroda-Transformationen benutzt. Diese Strukturen ergeben ebenfalls realisierbare Signalfluß-Diagramme. Die Eigenschaft der Element-Antimetrie ist dann nicht mehr erfüllt, es ist jedoch immer noch möglich, wie später gezeigt wird, solche Filter mit Erfolg zu optimieren.

Legt man außerdem noch einige α_v so fest, daß eine Realisierung nur eine geringe Zahl von zusätzlichen Addierern erfordert ($\alpha_v = 2^{-i}$ oder $\alpha_v = 2^{-i} + 2^{-j}$), so läßt sich eine entsprechende Optimierung durchführen. Es ist jedoch klar, daß die Optimierung mit abnehmender Zahl von Freiheitsgraden immer schwieriger wird.

Um auf einfache Ausdrücke für die zu erfüllenden Nebenbedingungen zu kommen, ist es zweckmäßig, das Problem als Optimierungsproblem für die oben angegebenen Widerstands-Parameter R_j zu formulieren. Diese können auf den Widerstand R der Spannungsquelle normiert werden:

$$r_i = R_i/R, \quad \ell_i = L_i/R, \quad c_i = C_i R \quad . \quad (4.15a,b,c)$$

Es ist offensichtlich nicht nötig, schwierige und zeitraubende Analysen von Signalfluß-Diagrammen durchzuführen [61,62], da alle

erforderlichen Dämpfungs- und Empfindlichkeitsberechnungen unmittelbar mit Hilfe des Referenzfilters erfolgen können.

An dieser Stelle soll noch einmal darauf hingewiesen werden, daß die als Ausgangspunkt für die Optimierung dienenden Filter schon unter voller Ausnutzung der durch die Einheitselemente gegebenen Filtermöglichkeiten approximiert worden sind (vgl. Kap. 2). In der Literatur sind dagegen schon häufig Filter beschrieben worden, bei denen die zur Entkopplung benutzten Einheitselemente keinen Beitrag zur Dämpfung leisteten [35-37]. Solche Filter enthalten natürlich eine gewisse Zahl von an sich überflüssigen Multiplizierern, Addierern und Speichern.

4.2.2 Empfindlichkeitsberechnung

Viele wichtige Optimierungsverfahren benötigen außer der zu minimierenden Funktion $f(\underline{x})$ auch den Gradienten $\nabla f(\underline{x})$, hierzu gehört u. a. auch das Fletcher-Powell-Verfahren [53]. Die schnelle und genaue Berechnung der Funktionswerte und der im Gradienten enthaltenen Netzwerk-Empfindlichkeiten kann für die Anwendung eines Optimierungsverfahrens von ausschlaggebender Bedeutung sein. Bei der Analyse von Abzweigschaltungen beginnt man die Berechnung zweckmäßigerweise mit einer festen Spannung am Lastwiderstand und berechnet dann alle Ströme und Spannungen mit einem Minimum an arithmetischen Operationen. Grundlegende Arbeiten zur Empfindlichkeitsberechnung von Netzwerken wurden von Bordewijk [78] und Géher [77] durchgeführt. Ausgehend vom Tellegen'schen Theorem haben Director und Rohrer das sogenannte "adjoint network"-Verfahren entwickelt, bei dem aus den Strömen und Spannungen im Netzwerk und in einem dazugehörigen transponierten Netzwerk mit sehr geringem zusätzlichem Aufwand die Empfindlichkeiten der Transmittanz oder Reflektanz gegenüber Änderungen von Bauelemente-

Parametern bestimmt werden können [58,50]. Es ist dann sehr fraglich, ob irgendein rechnerischer Vorteil dadurch zu erreichen wäre, daß man analytische Ausdrücke für die Funktion und die Empfindlichkeiten, z.B. mit Hilfe einer symbolischen Berechnung der f, g - oder f, h -Polynome und der entsprechenden Ableitungen, entwickeln würde.

Das transponierte Netzwerk hat die gleiche Topologie wie das Original-Netzwerk. Alle Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten und idealen Übertrager ändern sich nicht gegenüber dem Original-Netzwerk. Bei Gyrationen müssen Eingangs- und Ausgangstore miteinander vertauscht werden. Das Original-Netzwerk N und das transponierte Netzwerk N' sind in für die Empfindlichkeitsberechnung geeigneten Schaltungen in Bild 4.6 dargestellt.

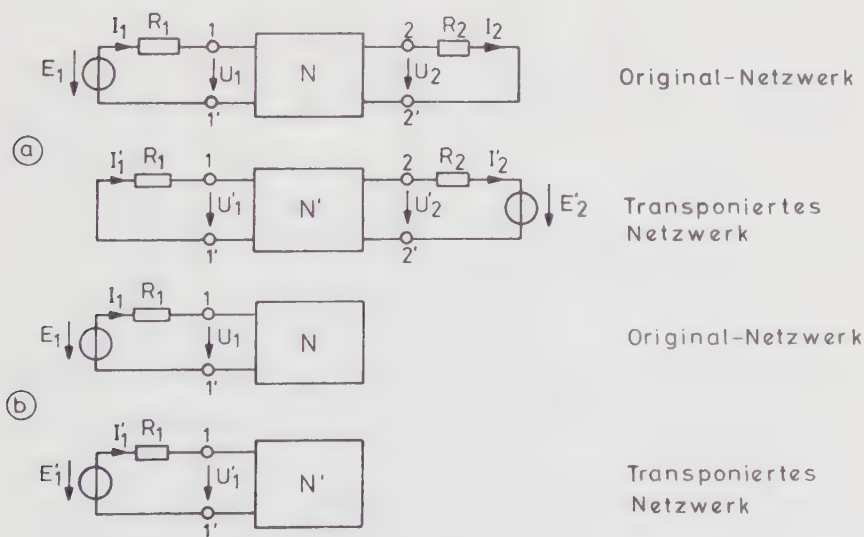


Bild 4.6 Empfindlichkeitsberechnung nach dem Verfahren von Director und Rohrer.

- (a) Übertragungsverhalten
- (b) Reflexionsverhalten

Für die Schaltung in Bild 4.6(a) gilt

$$\nabla I_2 = \frac{1}{E'_2} \underline{G} \quad , \quad (4.16)$$

und für die Schaltung in Bild 4.6(b) entsprechend

$$\nabla I_1 = \frac{-1}{E'_1} \underline{G} \quad . \quad (4.17)$$

Der Vektor $\underline{G}$ besteht aus den Empfindlichkeitsanteilen der Bauelemente des Netzwerks [50]. Hierzu einige Beispiele:

Element	Gleichung	Komponente von $\underline{G}$	Inkrement
Impedanz	$U = Z I$	$I \ I'$	∂Z
Idealer Übertrager	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$U_2 I'_1 + I_1 U'_2$	∂n
Einheits-element	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2}} \begin{bmatrix} 1 & R\psi \\ \frac{\psi}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{R}(U_1 I'_1 - U_2 I'_2)$	∂R
Gyrator	$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ \frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$	$I_2 I'_1 - I_1 I'_2$	∂R

Man erkennt aus (4.16) und (4.17), daß ∇I_2 und ∇I_1 bei einer gegebenen Frequenz nach maximal zwei Netzwerkanalysen bestimmt sind. Von Director wurde ein Verfahren angegeben, das im wesentlichen nur eine Netzwerkanalyse benötigt [80]. Natürlich können nach dieser Methode auch analytische Ausdrücke für die Gradienten gefunden werden. Es ist interessant, daß beim Entwurf von Netzwerken, die nur aus reziproken Bauelementen bestehen, ∇I_1 durch eine einzige Berechnung der entsprechenden Spannungen und Ströme bei jeder Frequenz gegeben ist, da man $E'_1 = E_1$ setzen kann und

das Netzwerk N mit dem transponierten Netzwerk N' identisch ist; hierdurch wird noch eine weitere Verringerung des Rechenaufwands erzielt. Bei verlustfreien Netzwerken kann man anschließend daraus $\nabla |I_2|^2$ und $\nabla |S_{21}|^2$ berechnen. Der Gradient des Betragsquadrates der charakteristischen Funktion C (2.19) ergibt sich in diesem Fall unter Verwendung der Definition

$$\left. \begin{aligned} S_{21} &= 2\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} \frac{U_2}{E} \\ S_{11} &= (2U_1 - E)/E \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

und mit der bei verlustfreien Zweitoren gültigen Beziehung

$$|S_{21}|^2 + |S_{11}|^2 = 1 \quad (4.19)$$

zu

$$\left. \begin{aligned} \nabla C &= \nabla(1/|S_{21}|^2 - 1) = -1/|S_{21}|^4 \nabla |S_{21}|^2 \\ \nabla C &= (1+C)^2 \nabla |S_{11}|^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Mit (4.17) erhält man dann

$$\left. \begin{aligned} \nabla |S_{11}|^2 &= 2 \operatorname{Re}\{S_{11}^* \nabla S_{11}\} \\ \nabla |S_{11}|^2 &= -4R_1 \operatorname{Re}\left\{\left(\frac{2U_1 - E_1}{E_1}\right)^* \frac{\nabla I_1}{E_1}\right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

und damit

$$\nabla C = \frac{4R_1(1+C)^2}{|E_1|^2} \operatorname{Re}\left\{\frac{(2U_1 - E_1)^*}{E_1} \underline{G}\right\} \quad (4.22)$$

Eine numerische Berechnung der Empfindlichkeiten über Differenzenverfahren hat gegenüber der hier angegebenen Methode nicht nur den Nachteil erheblich höherer Rechenzeiten, sondern außerdem noch den Nachteil wesentlich geringerer Genauigkeit, der u. a. zum vorzeitigen Abbruch des Optimierungsverfahrens führen kann.

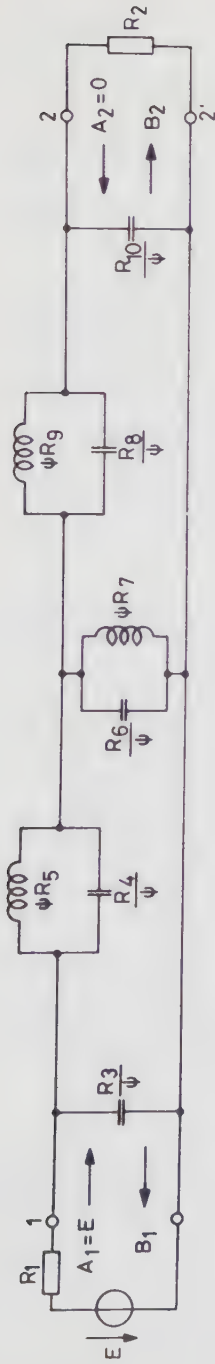
4.3. Allgemeine Filterstrukturen

4.3.1 Grundlagen der Optimierung

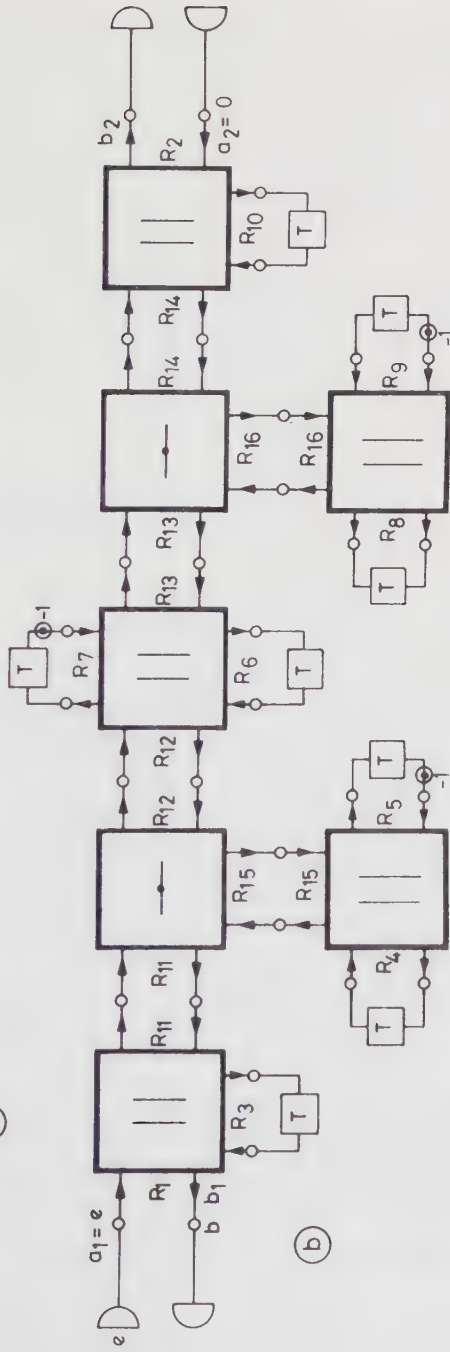
Eine zweite Methode zur Erfüllung der Realisierbarkeitsbedingung für das sich ergebende Signalfluß-Diagramm eines Wellendigitalfilters besteht in der Verwendung eines reflexionsfreien Tors bei jeder direkten Verbindung zweier Tore von Adaptoren. Dies läßt sich immer erreichen, indem man das entsprechende α_v gleich Eins wählt [13]. Mit Hilfe dieser Methode kann man jedes LC-Abzweigfilter als Referenzfilter benutzen (Bild 4.7). Die Zahl der Multiplizierer entspricht dann der Zahl der Freiheitsgrade des LC-Filters. Es ist klar, daß im Falle dieser echten Abzweigfilter keine solche einfache Möglichkeit besteht, die Zahl der Multiplizierer zu verringern, wie sie im Kap. 4.2 für Filter mit entkoppelnden Einheitselementen angegeben worden ist. Trotzdem gilt natürlich das schon in Kap. 1 diskutierte Empfindlichkeitsargument auch hier, daher sollte es möglich sein, die Wortlänge der Multiplizierer-Koeffizienten drastisch zu reduzieren, indem man z. B. einige der α_v gleich 2^{-i} bzw. gleich $2^{-i} + 2^{-j}$, i und j ganze Zahlen, wählt. Auf diese Art und Weise lassen sich Multiplizierer durch Skalierer 2^{-i} und höchstens einen zusätzlichen Addierer ersetzen.

Ein mögliches Verfahren, solche Filter zu optimieren, das wir als sequentiell stetige Optimierung bezeichnen, wird im folgenden angegeben:

1. Bei gegebenen Koeffizienten α_k legen wir einen oder mehrere auf Werte fest, bei denen eine schaltungsmäßige Realisierung nur eine minimale Zahl von zusätzlichen Addierern erfordert.



(a)



(b)

Bild 4.7 Echte Abzweigstruktur

(a) Referenzfilter

(b) ein entsprechendes Wellendigitalfilter

2. Unter Verwendung der verbliebenen Freiheitsgrade optimieren wir das Filter wieder, wobei die restlichen Koeffizienten stetig variieren können.

3. Wir fahren mit Schritt 1 fort, bis alle Freiheitsgrade verwendet worden sind.

Man beachte, daß dieses Verfahren auch zur weiteren Optimierung von Filtern mit entkoppelnden Einheitselementen und von Brückenfiltern [14] anwendbar ist. In allen Fällen ergeben sich gute Startwerte für eine beim Entwurf von Digitalfiltern häufig erforderliche diskrete Optimierung, die normalerweise sehr rechenintensiv und daher manchmal nicht durchführbar ist.

Es ist nun erforderlich, das Problem als Optimierungsproblem für die Multiplizierer-Koeffizienten α_k zu formulieren, um auf einfache Ausdrücke für die zu erfüllenden Nebenbedingungen zu kommen. Auch in diesen Fällen ist es nicht nötig, Analysen von Signalfluß-Diagrammen durchzuführen, um alle erforderlichen Dämpfungs- und Gradientenwerte zu berechnen. Aus der Theorie der Wellendigitalfilter ist bekannt, daß aus einem gegebenen Referenzfilter eine Vielzahl von digitalen Strukturen abgeleitet werden kann. Es existiert jedoch eine einfache frequenzunabhängige und eindeutige Methode zur Bestimmung aller Widerstands-Parameter R_j aus den Multiplizierer-Koeffizienten α_k , falls einer der Parameter R_j , z. B. der Widerstand der Quelle R , fest vorgegeben wird. Verwendet man (4.1a) und (4.3), so sieht man, daß für zwei beliebige Tore ν, μ eines Adaptors die folgenden Gleichungen gelten:

n-Tor Paralleladaptor

$$G_\nu / G_\mu = \alpha_\nu / \alpha_\mu, \quad (4.23)$$

$$\underline{n\text{-Tor Serienadaptor}} \quad R_V/R_\mu = \alpha_V/\alpha_\mu \quad . \quad (4.24)$$

Bei Zweitoradaptoeren gilt entsprechend mit (4.6) und (4.8):

$$\underline{\text{Zweitor-Paralleladaptor (P)}} \quad G_1/G_2 = (1-\alpha)/(1+\alpha) \quad , \quad (4.25)$$

$$\underline{\text{Zweitor-Serienadaptor(S)}} \quad R_1/R_2 = (1-\alpha)/(1+\alpha) \quad . \quad (4.26)$$

Beginnt man mit dem Quellwiderstand einer gegebenen digitalen Struktur, so kann man nacheinander die R_j , d. h. die Parameter des Referenzfilters berechnen. Hierfür läßt sich leicht ein sehr einfaches Rechnerprogramm aufstellen.

4.3.2 Empfindlichkeitsberechnung

Wenn die Optimierung auf Widerstands-Parametern R_j basiert, wird das "adjoint network"-Verfahren zur Berechnung der Empfindlichkeiten der Transmittanz oder Reflektanz benutzt. Im Fall von α_k Parametern könnte man eine Matrixdarstellung wählen und die Empfindlichkeiten mit Hilfe der Kettenregel berechnen [17]. Dieses Verfahren erfordert jedoch sehr viele Matrizenmultiplikationen bei jeder Frequenz und hat einen dementsprechend hohen Rechenzeitbedarf. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, daß man unter Verwendung von (4.23) - (4.26) $Vf(\underline{\alpha})$ aus $Vf(\underline{R})$ berechnet. Hierzu ist bei jeder Frequenz jedoch u. a. die Multiplikation einer Matrix mit $Vf(\underline{R})$ erforderlich, so daß dieses Verfahren nur zu Kontrollzwecken verwendet wurde.

Es wird nun ein neues zweckmäßiges Verfahren zur Berechnung von $Vf(\underline{\alpha})$ entwickelt, daß Gebrauch von einem allgemeinen Theorem für Signalfluß-Netzwerke macht [59]. Dieses Theorem ist dem von Tellegen sehr ähnlich. Hierzu betrachten wir den in Bild 4.8a

gegebenen Zweipol, bei dem Knoten 1 als Eingang und Knoten 2 als Ausgang dient. Die Empfindlichkeit der Transmittanz ist gegeben durch [59]

$$\partial S_{21} / \partial Z = \frac{Y_3 Y'_4}{Q Q'} = S_{31} S'_{42} \quad (4.27)$$

Dabei wird zur Bestimmung von Y'_4 der Zweipol in Bild 4.8(b), jedoch mit der Quelle Q' am Knoten 2, verwendet. In völlig ähnlicher Weise kann man die Empfindlichkeit der Reflektanz erhalten. Betrachten wir hierzu die Netzwerke in Bild 4.8(b) und 4.8(c), mit den numerierten Zweigen b und Knoten n. Es gilt [59]

$$\sum_b W_b = 0, \text{ mit } W_b = \sum_n (Y''_n X'_{bn} - Y'_n X''_{bn}); \quad (4.28)$$

außerdem gilt $W_b = 0$ für $b=2$ und $b>3$, und wir erhalten dann

$$\partial S_{11} / \partial Z = \frac{Y_3 Y'_4}{Q Q'} = S_{31} S'_{41} \quad (4.29)$$

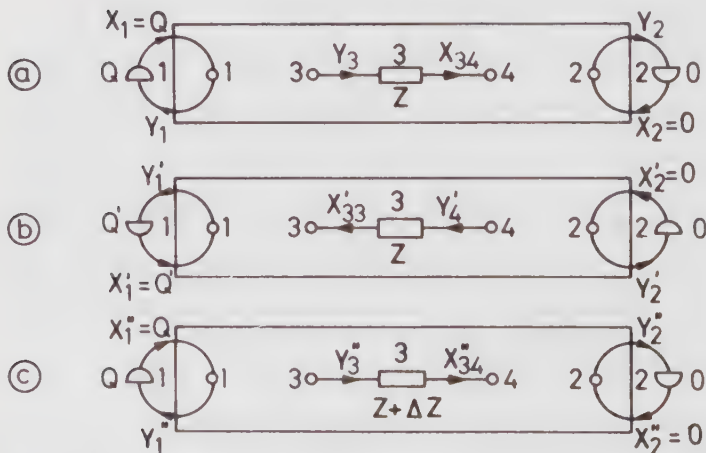


Bild 4.8 (a) Ein Signalfluß-Netzwerk bei dem die Knoten 3 und 4 durch einen Zweig (3) mit der Übertragungsfunktion Z verbunden sind
 (b) Transponiertes Netzwerk zu (a)
 (c) wie (a), jedoch Z geändert in $Z + \Delta Z$

Es ist also möglich, die Empfindlichkeiten der Transmittanz oder der Reflektanz durch je eine einzige Analyse des Netzwerks und des transponierten Netzwerks zu bestimmen. Auch hier läßt sich ein Verfahren angeben, das im wesentlichen nur eine Netzwerkanalyse benötigt (vergl. [80]). In Wellendigitalfiltern bleiben Blöcke, die zu reziproken Elementen gehören, durch die Transposition unverändert, während Adaptoren zu Adaptoren entgegengesetzten Typs mit invertierten Ausgängen³⁾ werden (Bild 4.9). Das neue Signalfluß-Diagramm entspricht vollständig dem, das man aus dem transponierten dualen Referenzfilter erhalten würde, bis auf die Tatsache, daß an den Toren 1 und 2 des Filters die Ausgänge invertiert sind [60]. Ein Beispiel hierzu ist in Bild 4.10 angegeben. Die Empfindlichkeiten sind dann also nach je einer Analyse des Referenzfilters und des dazu gehörenden transponierten dualen Filters bestimmt (vergl. Bild 4.6), wenn man die

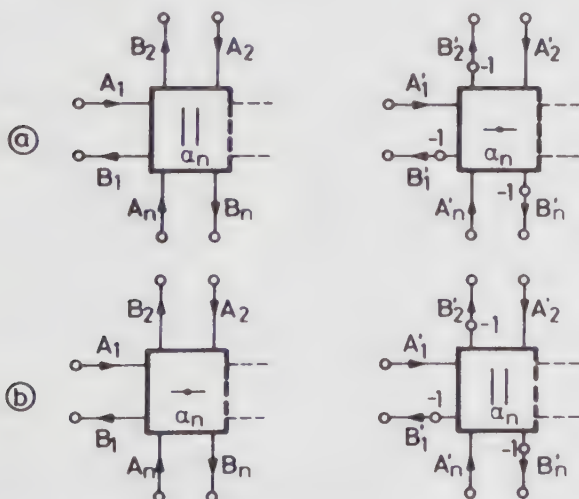


Bild 4.9 a) n-Tor Paralleladaptor und transponiertes Netzwerk
 b) n-Tor Serienadaptor und transponiertes Netzwerk
 (mit Multipliziererkoeffizienten $a_v, v = 1, 2, \dots, n$)

³⁾ Mit dem Begriff Invertieren wird die Umkehr des Vorzeichens eines Signals bezeichnet.

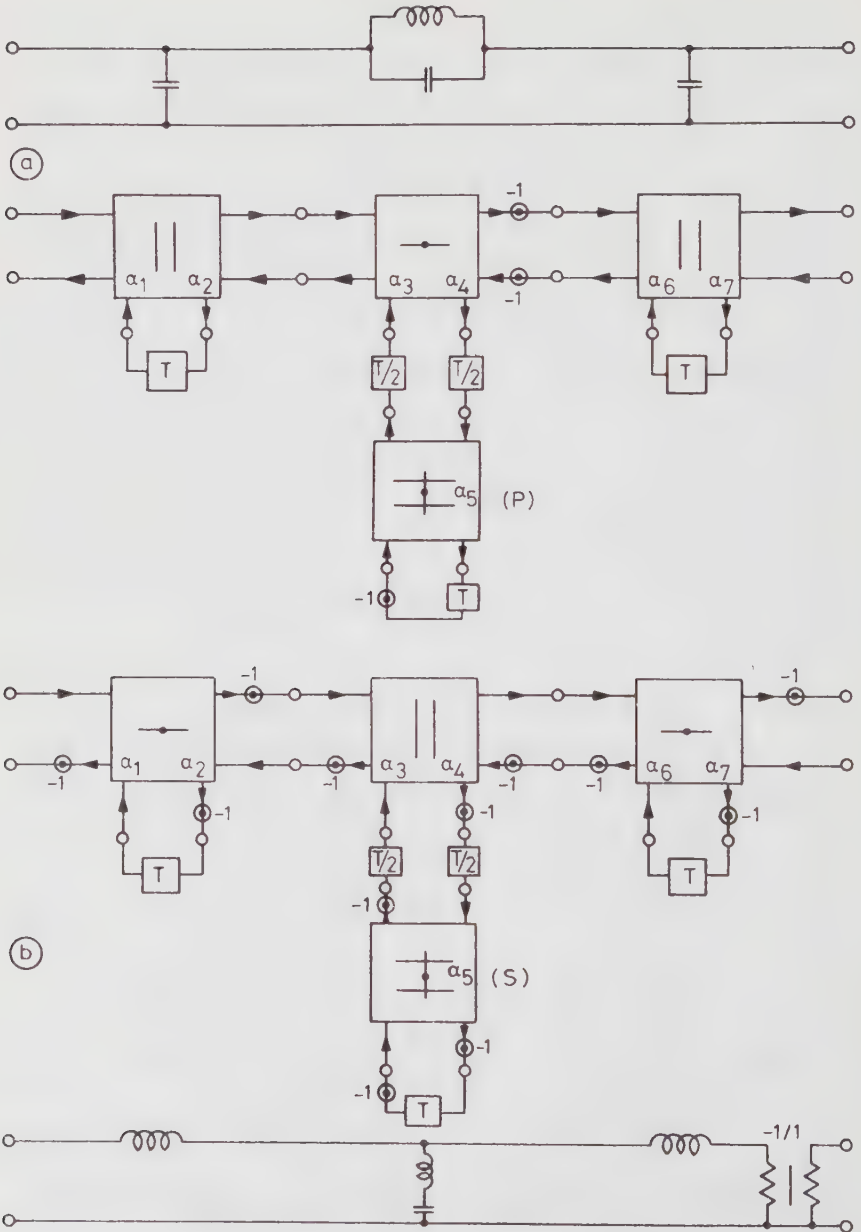


Bild 4.10 Beispiel für die Transposition

- (a) Referenzfilter und zugehöriges Digitalfilter
- (b) Transponiertes Digitalfilter und zugehöriges
duales Referenzfilter

Eingangssignale der Multiplizierer Y_v , Y'_v bzw. Y , Y' aus den entsprechenden Spannungswellen unter Berücksichtigung des inneren Aufbaus der Adaptoren [22] berechnet. Ordnet man jedem Tor v den Multiplizierer α_v zu, so erhält man folgende Beziehungen (vergl. Gl. 4.10 - 4.12):

n-Tor Paralleladaptor $Y_v = A_v - A_n$, Tor n abhängig, (4.30)

n-Tor Serienadaptor $Y_v = 1/\alpha_v(A_v - B_v)$, (4.31)

Zweiter-Paralleladaptor (P) $Y = A_2 - A_1$, (4.32)

Zweiter-Serienadaptor (S) $Y = A_2 + A_1$. (4.33)

Man beachte bei Bild 4.10, daß sich die Tororte im Signalfluß-Diagramm einer vom transponierten dualen Referenzfilter entwickelten Struktur von denen des ursprünglichen Signalfluß-Diagramms unterscheiden würden (Bild 4.11). Unter dem Begriff Tororte soll hier die Lage der Tore verstanden werden, die sich beim Aufbau der Schaltung aus den Elementarzellen in Bild 4.13 - 4.14 ergibt.

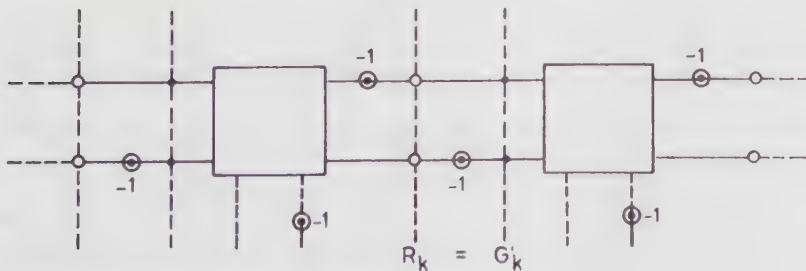


Bild 4.11 Unterschiedliche Tororte

Da der Übergang von Spannungswellen zu Stromwellen uneingeschränkt äquivalent mit der Dualität ist [60], kann man die Verwendung des transponierten dualen Referenzfilters vermeiden und

statt dessen die Stromwellen des transponierten Referenzfilters benutzen. Die Stromwellen an jedem Tor k ergeben sich mit (2.7) zu

$$A_k^i = A_k^u / R_k, \quad B_k^i = -B_k^u / R_k. \quad (4.34)$$

Aus (4.30) - (4.33) und mit Hilfe der Definitionsgleichungen für die Spannungs- und Stromwellen läßt sich für die Empfindlichkeiten der Transmittanz oder der Reflektanz folgendes Ergebnis ableiten:⁴⁾

$$\text{n-Tor Paralleladaptor} \quad Y_v Y_v' = (I_v / \alpha_v - I_n / \alpha_n) 2U', \quad (4.35)$$

$$\text{n-Tor Serienadaptor} \quad Y_v Y_v' = -(U_v / \alpha_v - U_n / \alpha_n) 2I', \quad (4.36)$$

$$\text{Zweitor-Paralleladaptor (P)} \quad YY' = -4U_1 I_1 / (1 - \alpha^2), \quad (4.37)$$

$$\text{Zweitor-Serienadaptor (S)} \quad YY' = 4U_1 I_1 / (1 - \alpha^2). \quad (4.38)$$

Hierbei sind U_v, I_v bzw. U, I die Spannungen und Ströme an den entsprechenden n-Toren des Referenzfilters. Die Ergebnisse bei Parallel- und Serienadaptoren sind nur geringfügig unterschiedlich, wenn man berücksichtigt, daß bei Parallelschaltungen all U_v gleich und bei Serienschaltungen alle I_v gleich sind. Das unterschiedliche Vorzeichen kommt daher, daß bei der Transposition ein Paralleladaptor in einen Serienadaptor mit invertierten Ausgängen übergeht, ein Serienadaptor jedoch in einen Paralleladaptor mit invertierten Eingängen. Bezüglich der Wirkung auf die äußere Schaltung kann man jedoch in beiden Fällen invertierte Ausgänge annehmen [22]. Falls das Referenzfilter verlustfrei ist und alle Bauelemente reziprok sind, erhält man $\nabla f(\underline{R})$ gemäß Kap. 4.2.2 durch eine einzige Berechnung der entsprechenden Spannungen und Ströme. Dieses Prinzip läßt sich nicht allgemein auf Signalfluß-Diagramme übertragen, aber es kann bei Wellendigitalfiltern, deren Referenzfilter die oben angegebenen Eigenschaften haben, angewendet werden. Mit $E_1' = E_1$ sind die gestrichenen Spannungen und Ströme gleich den ungestrichenen. Die Gleichungen (4.35) und (4.36) bzw. (4.37)

⁴⁾ siehe Anhang A2

und (4.38) lassen sich nun für die Empfindlichkeiten der Reflektanz zusammenfassen zu:

$$\text{n-Tor Adaptor} \quad Y_V Y'_V = \pm 2 \left(\frac{U_V I_V}{\alpha_V} - \frac{U_n I_n}{\alpha_n} \right), \quad (4.39)$$

$$\text{Zweiteradaptor} \quad YY' = \mp 4 U_1 I_1 / (1 - \alpha^2) \quad (4.40)$$

Das obere Vorzeichen gilt dann für Paralleladaptoren, das untere für Serienadaptoren.

Die weitere Bestimmung von ∇C erfolgt nun mit (4.20) und

$$\left. \begin{aligned} \nabla |S_{11}|^2 &= 2 \operatorname{Re} \{ S_{11}^* \nabla S_{11} \} \\ \nabla |S_{11}|^2 &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{(2U_1 - E_1)^*}{E_1} \nabla S_{11} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

sowie mit $Q = E_1$ und $Q' = E_1/R_1$ zu

$$\nabla C = \frac{4R_1(1+C)^2}{|E_1|^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(2U_1 - E_1)^*}{E_1} \underline{G} \right\} \quad (4.42)$$

Die Gleichung (4.42) ist identisch mit (4.22); die Komponenten des Vektors $\underline{G}$ bestehen analog zu Kap. 4.2.2 aus den Empfindlichkeitsanteilen der Adaptoren $Y_V Y'_V/2$ bzw. $YY'/2$. Insgesamt ist damit ein Verfahren zur Gradientenberechnung entwickelt worden, das, wie beim "adjoint network"-Verfahren für verlustfreie Zweitore, die nur aus reziproken Bauelementen bestehen, mit einer einzigen Berechnung der entsprechenden Spannungen und Ströme bei jeder Frequenz auskommt. Die Berechnung von ∇C erfordert gegenüber der Dämpfungsrechnung praktisch nur einen geringfügigen Mehraufwand, da nur schon berechnete Spannungen und Ströme im Referenzfilter verwendet werden.

4.4 Approximationsproblem und Optimierungs-Algorithmus

In diesem Abschnitt soll das folgende Tiefpaßfilter-Entwurfsproblem behandelt werden: Bei gegebener Filterstruktur sei $\underline{x}$ der Vektor der Netzwerk-Parameter, die aus den Widerstandsparametern r_i , l_i , c_i oder aus den Multiplizierer-Koeffizienten α_k bestehen können, und A_d sei die maximale Dämpfung im Durchlaßbereich ($0 \leq \varphi \leq \varphi_d$) sowie A_s die minimale Dämpfung im Sperrbereich ($\varphi_s \leq \varphi < \infty$) (Bild 4.12). Falls man A_d auf einen vorgeschriebenen Wert A_{do} festlegt, so besteht das Optimierungsproblem für $\underline{x}$ darin, A_s zu einem Maximum zu machen. Dieses Optimierungsproblem entspricht dem in Kap. 2 beschriebenen Approximationsproblem, d. h., es handelt sich hierbei um ein nichtlineares einseitiges Tschebyscheff-Approximationsproblem mit Nebenbedingungen [27]. Da für nichtlineare Tschebyscheff-Approximationen Existenz, Eindeutigkeit und Charakterisierung von Lösungen nur für einige wenige Fälle gegeben sind, ist es erforderlich, das Problem als ein Minimierungsproblem ohne explizite Nebenbedingungen zu formulieren. Die Minimierung kann dann mit Hilfe eines geeigneten Minimierungsverfahrens auf einem Digitalrechner durchgeführt werden. Es gibt eine große Zahl von Möglichkeiten, geeignete Zielfunktionen zu definieren; hier sollen die folgenden Funktionen vorgestellt und verglichen werden ($\gamma = \text{konst.}$):

$$F_1(\underline{x}) = \frac{1}{A_s(\underline{x})} + \gamma \left| A_{do} - A_d(\underline{x}) \right|^2, \quad \gamma = \begin{cases} > 0 & \text{für } A_d > A_{do} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (4.43)$$

$$F_2(\underline{x}) = \frac{A_d(\underline{x})}{A_s(\underline{x})} + \gamma \left| 1 - \frac{A_d(\underline{x})}{A_{do}} \right|^2, \quad \gamma > 0, \quad (4.44)$$

$$F_3(\underline{x}) = \frac{C_d(\underline{x})}{C_s(\underline{x}) \cdot \beta} + \gamma \left| 1 - \frac{C_d(\underline{x})}{C_{do}} \right|^2, \quad \gamma > 0, \quad (4.45)$$

wobei C_d , C_s , C_{do} mit $C(\varphi) = |K(\varphi)|^2$ (2.19) den Größen A_d , A_s , A_{do} entsprechen. Die Konstante β ist gleich dem Wert von C_d/C_s am Ausgangspunkt der Optimierung.

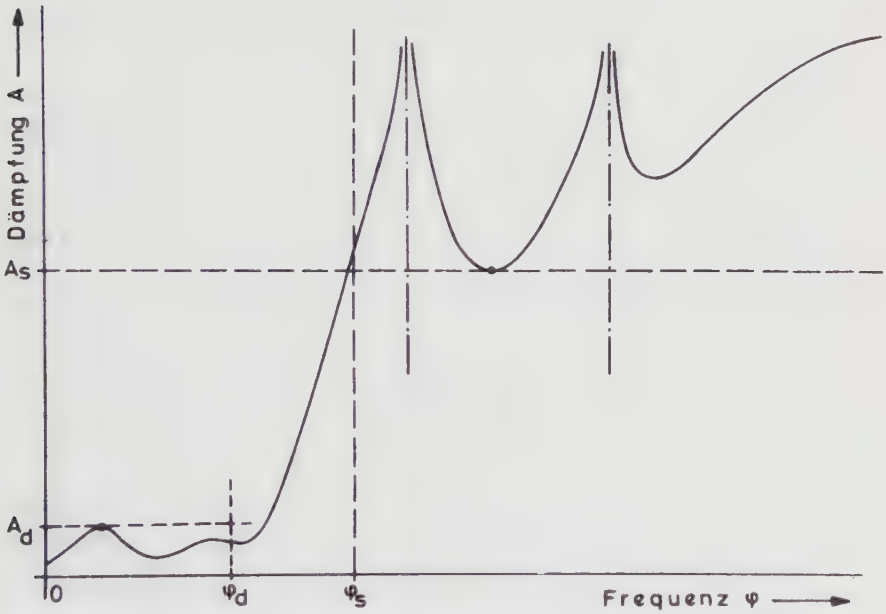


Bild 4.12 Tiefpaßfilter - Entwurfsproblem

$$F_4(\underline{x}) = \frac{C'_d(\underline{x})}{C'_s(\underline{x}) \cdot \beta} + \gamma \left| 1 - \frac{C'_d(\underline{x})}{C_{do}} \right|^2, \quad \gamma > 0 \quad (4.46)$$

mit

$$C'_d(\underline{x}) = \left\{ \int_0^{\psi_d} \left[\frac{C(\varphi, \underline{x})}{C_d(\underline{x})} \right]^q d\varphi \right\}^{1/q} \cdot C_d(\underline{x}), \quad q \geq 1, \quad (4.47)$$

$$C'_s(\underline{x}) = \left\{ \int_{\psi_s}^{\infty} \left[\frac{C(\varphi, \underline{x})}{C_s(\underline{x})} \right]^{-q} d\varphi \right\}^{-1/q} \cdot C_s(\underline{x}) \quad (4.48)$$

Während F_1 bis F_3 unmittelbare Minimax-Formulierungen darstellen, ist F_4 in Form einer L_p -Zielfunktion ($p = q$) geschrieben [49-52]. In (4.46) ist β gleich dem Wert von C'_d/C'_s am Ausgangspunkt der Optimierung. Die Formulierung von C'_d und C'_s ermöglicht die Wahl von sehr hohen Werten für q bis in die Größenordnung von $q = 10^6$. Es gilt $\lim_{q \rightarrow \infty} F_4 = F_3$.

Zur Ausführung der Minimierungen wird das Fletcher-Powell-Verfahren verwendet, das allgemein anerkannt zur Zeit eines der besten Minimierungsverfahren ist [53]. Hierzu eine kurze Beschreibung dieses Quasi-Newton-Verfahrens:

1. Ausgehend von einem Startwert $\underline{x}_0$ wähle man eine beliebige positiv definite Matrix $\underline{H}_0$, z. B. die Einheitsmatrix und setze $i = 0$.

2. Man setze $\underline{s}_i = -\underline{H}_i \underline{g}_i$, (4.49)

wobei $\underline{g}_i = \nabla f(\underline{x}_i)$ ist. Anschließend minimiere man $f(\underline{x}_i + \alpha \underline{s}_i)$; damit ist durch die sogenannte Linearsuche $\alpha_i > 0$ bestimmt. Man ermittle

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i + \alpha_i \underline{s}_i \quad (4.50)$$

und

$$\underline{\sigma}_i = \alpha_i \underline{s}_i \quad (4.51)$$

3. Man berechne $\underline{g}_{i+1}$ und setze

$$\underline{y}_i = \underline{g}_{i+1} - \underline{g}_i \quad (4.52)$$

Dann berechne man

$$\underline{H}_{i+1} = \underline{H}_i + \frac{\underline{\sigma}_i \underline{\sigma}_i^T}{\underline{\sigma}_i^T \underline{y}_i} - \frac{\underline{H}_i \underline{y}_i \underline{y}_i^T \underline{H}_i}{\underline{y}_i^T \underline{H}_i \underline{y}_i} \quad (4.53)$$

4. Man setze $i = i+1$ und fahre mit Schritt 2 fort, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist $|53|$.

Dieses Verfahren minimiert eine quadratische Funktion n-ter Dimension in genau n Schritten. Die Matrix $\underline{H}_i$ strebt im Laufe des Verfahrens gegen die inverse Hess'sche Matrix. Das Verfahren ist stabil, da $\underline{H}_i$ stets positiv definit ist, so daß der Vektor $\underline{s}_i$ stets in Richtung von $-\underline{g}_i$ zeigt. Bei der sogenannten Linearsuche handelt es sich um die Minimumsuche in einer Richtung, dies stellt numerisch einen der kritischen Punkte des Verfahrens dar. Gegenüber den veröffentlichten Algorithmen [54-57] wurden einige kleine Änderungen zur Überwindung von Schwierigkeiten aufgrund der endlichen Rechengenauigkeit vorgenommen: Eine verbesserte Extrapolation ergibt eine genauere Einschachtelung des Minimums bei der Linearsuche; und falls die Minimierung nicht mehr fortschreitet, wird ein erneuter Start in Gradientenrichtung ($\underline{H}_0 =$ Einheitsmatrix) vorgenommen. Die letztere Änderung ist erforderlich, da bei nichtquadratischen Funktionen $\underline{H}_i$ unter Umständen singulär werden kann. Das Verfahren wird abgebrochen, wenn ein erneuter Start keine weitere Verringerung der Funktion f ergibt.

Die erforderlichen Funktions- und Gradientenberechnungen erfolgen auf einer diskreten Menge von Punkten φ_i , die ungleichmäßig im Durchlaß- bzw. Sperrbereich verteilt werden, so daß sie dichter in der Nähe von kritischen Bereichsgrenzen sind. Die Verteilung wurde entsprechend der Verteilung der Nullstellen von

Tschebyscheff-Polynomen gewählt. Da die zugrunde liegenden Referenzfilter reziprok und verlustfrei sind, reicht eine einzige Berechnung der Spannungen und Ströme im Referenzfilter bei jeder Frequenz φ_i zur Bestimmung von f und $\nabla f(\underline{x})$ aus. Man beginnt die Berechnung zweckmäßigerweise mit einer festen Spannung am Lastwiderstand und berechnet dann alle Ströme und Spannungen mit einem Minimum an arithmetischen Operationen. Dies entspricht der Verwendung der Kettenmatrix-Darstellung, wobei jedoch nur die in jedem Schritt unbedingt notwendigen Multiplikationen und Additionen ausgeführt werden. Man überzeugt sich an Hand der Bilder 4.13 und 4.14 leicht, daß eine Transfermatrix-Darstellung, unabhängig von der Art der Parameter ($\underline{\alpha}$ oder $\underline{R}$), in jedem Fall einen wesentlich höheren Rechenaufwand ergibt. Nebenbedingungen der Form

$$x_i = \text{konst.}, \quad x_i = x_j, \quad x_i = kx_j, \quad x_i = k/x_j, \quad x_i > 0$$

lassen sich während der Optimierung leicht erfüllen. Wegen der Vielzahl der möglichen Strukturen von Wellendigitalfiltern wurde ein systematischer Aufbau der Abzweigschaltungen aus Elementarzellen zugrunde gelegt (vergl. Bild 4.13 u. 4.14). Die Tatsache, daß bei den 3-Tor Adaptoren das abhängige Tor 3 immer im Quersweig liegt, bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da man α_3 mit (4.5b) indirekt festlegen kann. Bei $\underline{R}$ Parametern gehören zu jeder Elementarzelle max. zwei Variable (z. B. R' und R''), bei $\underline{\alpha}$ Parametern drei Variable ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha$).

Die Abhängigkeit der charakteristischen Funktion und der Dämpfung von den Bauelemente-Parametern R_j oder α_k ist bekanntlich immer stark nichtlinear, so daß bei der Auswahl einer geeigneten Zielfunktion möglichst keine weiteren Probleme durch eine größere Zahl von unbekannten Gewichtungsfaktoren etc. auftreten

	1	2	3	4	5
Analog					
Digital					
T-Matrix $T(B)$	$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{R_1}}{\sqrt{R_2}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} & 0 \\ 1-\varphi & 1+\varphi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2R_2} & R_2-R_1 \\ R_2R_1 & R_2-R_1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2R_2} & R_2-R_1 \\ R_2R_1 & R_2-R_1 \end{bmatrix}$
T-Matrix $T(a)$	$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} & 0 \\ 1-\varphi & 1+\varphi \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{1-a} & -a \\ 1 & -a \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} T_{11} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} + \frac{2 \cdot (a_1 \cdot a_2)}{2a_2} \\ T_{12} = -\frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} - \frac{2 \cdot (a_1 \cdot a_2)}{2a_2} \\ T_{21} = -\frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} + \frac{2 \cdot (a_1 \cdot a_2)}{2a_2} \\ T_{22} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} + \frac{2 \cdot (a_1 \cdot a_2)}{2a_2} \\ a_1 = \frac{2R_1}{R_1+R_2+R_3} \quad a_2 = \frac{2R_2}{R_1+R_2+R_3} \end{bmatrix}$

Bild 4.13 Elementarzellen 1-5

6	7	8	9	10
$\left[\begin{array}{l} R_2 R_1 + R^4 \psi \\ R_2 R_1 + R^4 \psi \end{array} \right] \frac{1}{2R_2}$	$\left[\begin{array}{l} R_2 R_1 + \frac{R_1 R_2}{R^2} \psi \\ R_2 R_1 + \frac{R_1 R_2}{R^2} \psi \end{array} \right] \frac{1}{2R_2}$	$\left[\begin{array}{l} R_2 R_1 + \frac{R_1 R_2}{R} \frac{1}{R} \psi \\ R_2 R_1 + \frac{R_1 R_2}{R} \frac{1}{R} \psi \end{array} \right] \frac{1}{2R_2}$	$\left[\begin{array}{l} R_2 R_1 + \frac{R_1 R_2}{R^2} \psi \\ R_2 R_1 + \frac{R_1 R_2}{R^2} \psi \end{array} \right] \frac{1}{2R_2}$	$\left[\begin{array}{l} R_2 R_1 + \frac{R^4 \psi}{R^2} \\ R_2 R_1 + \frac{R^4 \psi}{R^2} \end{array} \right] \frac{1}{2R_2}$
$T_{11} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} - j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_2}$	$T_{11} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_1} + j \frac{2 \cdot (a_1 \cdot a_2)}{2a_1 \psi}$	$T_{11} = \frac{(a_1 \cdot a_2)}{2a_1} - j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_1}$	$T_{11} = \frac{(a_1 \cdot a_2)}{2a_1} - j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_1}$	$T_{11} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} - j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_2}$
$T_{12} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} + j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_2}$	$T_{12} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_1} - j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_1}$	$T_{12} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_1} - j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_1}$	$T_{12} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} + j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_2}$	$T_{12} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} + j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_2}$
$T_{21} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} - j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_2}$	$T_{21} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_1} + j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_1}$	$T_{21} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_1} + j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_1}$	$T_{21} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} - j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_2}$	$T_{21} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} - j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_2}$
$T_{22} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} + j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_2}$	$T_{22} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_1} - j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_1}$	$T_{22} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_1} - j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_1}$	$T_{22} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} + j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_2}$	$T_{22} = \frac{a_1 \cdot a_2}{2a_2} + j \frac{(2 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \psi}{2a_2}$
$a_1 = \frac{2R_1}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3} ; a_2 = \frac{2R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}$	$a_1 = \frac{2G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3} ; a_2 = \frac{2G_2}{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}$	$a_1 = \frac{2G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3} ; a_2 = \frac{2G_2}{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}$	$a_1 = \frac{2G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3} ; a_2 = \frac{2G_2}{G_1 \cdot G_2 \cdot G_3}$	$a_1 = \frac{2R_1}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3} ; a_2 = \frac{2R_2}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}$

Bild 4.14 Elementarzellen 6-10

dürfen. Die Funktionen F_1 und F_2 haben sich als sehr ungünstig im Hinblick auf die numerische Genauigkeit erwiesen. Außerdem war es unmöglich, im voraus geeignete Werte des Gewichtungsfaktors γ zu bestimmen. Verglichen damit hat F_3 zwei wesentliche Vorteile:

1. Wegen der Tatsache, daß der erste Term von (4.45) invariant gegen Multiplikationen von $C(\varphi)$ mit einer Konstanten ist, führt eine Minimierung mit voller Zahl von Freiheitsgraden zu der optimalen Lösung für gleichrippige Filter mit irgendeinem A_d , sogar, wenn γ gleich Null ist.

2. Aufgrund der guten Normierung können außerdem erfolgreiche Optimierungen mit $\gamma \approx 100$ für eine große Zahl von unterschiedlichsten Filtern mit verringerter Zahl von Freiheitsgraden durchgeführt werden.

Obwohl unmittelbare Minimax-Formulierungen in der Literatur über Netzwerk-Optimierungen wenig Beachtung gefunden haben, da unstetige Ableitungen erzeugt werden, benötigte die L_p Formulierung durch F_4 im Mittel ca. 30 % mehr Rechenzeit, obwohl fast immer weniger Iterationen beim Fletcher-Powell-Verfahren gebraucht wurden. Dies liegt daran, daß bei F_4 für jeden Punkt φ_1 Ableitungsberechnungen erforderlich sind, und an der Auswertung von (4.47) - (4.48). Im Falle von Filtern mit Element-Symmetrie oder Element-Antimetrie ist es möglich, die Zahl der Variablen zu verringern, falls die auferlegten Nebenbedingungen diese Eigenschaften nicht zerstören. Dies entspricht in gewissem Sinn den bekannten Invarianzeigenschaften der linearen Approximationstheorie [25]. Bleiben bei der Optimierung die Dämpfungspole unverändert, so verwendet man anstelle von $A_s(\underline{x})$ bzw. $C_s(\underline{x})$ und $C'_s(\underline{x})$ zur Einsparung von Rechenzeit zweckmäßigerweise $A(\varphi_s, \underline{x})$ bzw. $C(\varphi_s, \underline{x})$.

Eine Erweiterung der Formulierung des Approximationsproblems und der Durchführung der Optimierung auf andere Filtertypen (Hochpaß-, Bandpaß, Bandsperrfilter) ist leicht möglich. Insbesondere lassen sich auch beliebige Dämpfungsverläufe $A_{d0}(\varphi)$ und durch Einführung von $\gamma(\varphi)$ auch unterschiedliche Approximationsgüten erzielen. Die Annahme, daß $A(\varphi)$ im Durchlaßbereich mindestens einmal Null wird, kann ebenfalls bei Bedarf fallengelassen werden, dann ist jedoch außer A_d auch noch das Minimum der Dämpfung im Durchlaßbereich zu bestimmen; die Zielfunktionen sind entsprechend zu modifizieren.

4.5 Ergebnisse der numerischen Optimierung

4.5.1 Filter mit entkoppelnden Einheitselementen

Die Optimierung erfolgt mit R Parametern. Im folgenden werden einige typische Beispiele beschrieben, die zeigen, daß das angegebene Optimierungsverfahren zu günstigen Wellendigitalfiltern mit verringerter Zahl an Multiplizierern bzw. kleinerem Multipliziereraufwand (Koeffizientenwortlänge bzw. Zahl der Addierer) führt (Bild 4.15 - 4.19). Da die Beispiele recht ausführlich dargestellt sind, kann die Beschreibung kurzgehalten werden. Die Zahl der Multiplizierer wird mit M bezeichnet. Die Startwerte für die Optimierung ergeben sich unmittelbar aus den Werten der gleichrippigen Filter ohne Nebenbedingungen bzw. aus den Werten der vorherigen Optimierung.

In Bild 4.15 - 4.17 wird ein Vergleich durchgeführt, der zeigt, daß die Dämpfungen im Sperrbereich bei optimierten Einheitselementfiltern ($r_i = r$, $i = 1, 2, 3, \dots$) wesentlich höher sind, als die von nichtoptimierten Filtern mit echter Abzweigstruktur und gleicher Zahl an Multiplizierern. Man beachte, daß die Dämpfung im Sperrbereich bei den optimierten Filtern fast so hoch ist, wie bei den entsprechenden gleichrippigen Filtern ohne Nebenbedingungen. Das Beispiel in Bild 4.18 zeigt eine noch weitergehende Optimierung, indem durch spezielle Wahl der Widerstandsparameter noch zusätzlich vier Multiplizierer durch je einen Skalierer 2^{-i} ersetzt werden konnten. Eine solche Ermittlung der Widerstandsparameter ist jedoch sehr schwierig, so daß die weitere Optimierung allgemein besser mit α Parametern durchgeführt wird. In Bild 4.19 sieht man, daß die Struktur mit Element-Antimetrie nicht unbedingt zur besten Lösung führt. Die nor-

mierten Werte der Bauelemente der optimierten Filter sind in Tabelle 1 angegeben.

Die Ergebnisse der Optimierung lassen sich sofort auf die entsprechende duale Struktur übertragen. Aus den hier angegebenen Referenzfiltern kann man eine Vielzahl unterschiedlicher Digitalfilter mit gleichen Multiplizierer-Koeffizienten ableiten [22,66], die jedoch z. B. unterschiedliches Rauschen haben können oder unterschiedlichen Aufwand bei der praktischen Realisierung erfordern [71]. Die Ergebnisse zeigen, daß die optimierten Filter noch teilweise gleichrippig sind, die Dämpfungsnullstellen liegen jedoch nicht mehr immer auf der φ -Achse. Die Zahl der Freiheitsgrade stimmt nicht in jedem Fall mit der Zahl der Extrempunkte überein, insbesondere nicht bei Filtern mit Dämpfungspolen bei endlichen Frequenzen.

Wie bei allen stark nichtlinearen Optimierungen ist es nicht möglich, die Optimalität der Lösungen zu beweisen. Eine Überprüfung durch wiederholte Minimierungen von unterschiedlichen Startwerten aus bzw. mit unterschiedlichen Zielfunktionen hat jedoch gezeigt, daß die erreichten Lösungen praktisch nicht mehr zu verbessern waren. Aufgrund der endlichen numerischen Genauigkeit ergeben sich dabei evtl. Lösungen mit geringfügig abweichendem Verlauf der Dämpfung im Durchlaßbereich und nahezu unveränderter Dämpfung im Sperrbereich. Die von Thiran [72] vorgeschlagene Anwendung eines modifizierten Remes-Algorithmus zur Lösung des Optimierungsproblems ist nicht günstig, da die Charakterisierung der Optimallösungen mit Hilfe von Alternanten hier nicht möglich ist. Selbst im Fall von Filtern ohne Dämpfungspole bei

endlichen Frequenzen ergibt sich eine mit steigendem Grad des Filters zunehmende Zahl von teilweise gleichrippigen Lösungen mit stark unterschiedlicher Dämpfung im Sperrbereich, so daß sehr viele Versuche zur Bestimmung der Optimallösung nötig sind. Die beim modifizierten Remes-Algorithmus essentielle Voraussetzung, daß die Zahl der Freiheitsgrade gleich der Zahl der Extrempunkte sein muß, ist nicht allgemein erfüllt. Als weiterer Nachteil kommt hinzu, daß sehr genaue Startwerte vorhanden sein müssen, damit überhaupt Konvergenz eintritt.

Die benötigte Rechenzeit bei der Minimierung hängt stark von der Zahl der Stützpunkte im Durchlaß- und Sperrbereich und vom Grad des Filters bzw. von der Zahl der variablen Parameter ab. Da für die Berechnung von f und V_f Verfahren mit sehr geringem Rechenzeitbedarf verwendet werden, betrugen die Rechenzeiten für die Optimierung der Beispiele nur zwischen fünf Sekunden und einigen Minuten (TR 440). Bei Filtern noch höheren Grades (z. B. $n > 17$) muß man aus Genauigkeitsgründen doppelt lange Arithmetik verwenden. Hierdurch, durch die starke Nichtlinearität und durch die steigende Zahl der Variablen ist dann sehr schnell die Grenze einer noch vertretbaren Rechenzeit erreicht.

Falls nicht anders angegeben, ist in den Beispielen der Abschlußwiderstand R_2 gleich dem Widerstand R_1 der Spannungsquelle.

Mit abnehmender Dämpfung im Durchlaßbereich A_d wird bei den optimierten Filtern der Verlust an Sperrdämpfung gegenüber den entsprechenden gleichrippigen Filtern ohne Nebenbedingungen langsam größer. Bei einem Filter mit einer Struktur analog zu Filter 1A und $n=7$, $A_d=0.00043$ dB ($\rho=1$ %) betrug der Verlust an Sperrdämpfung ca. 50 %.

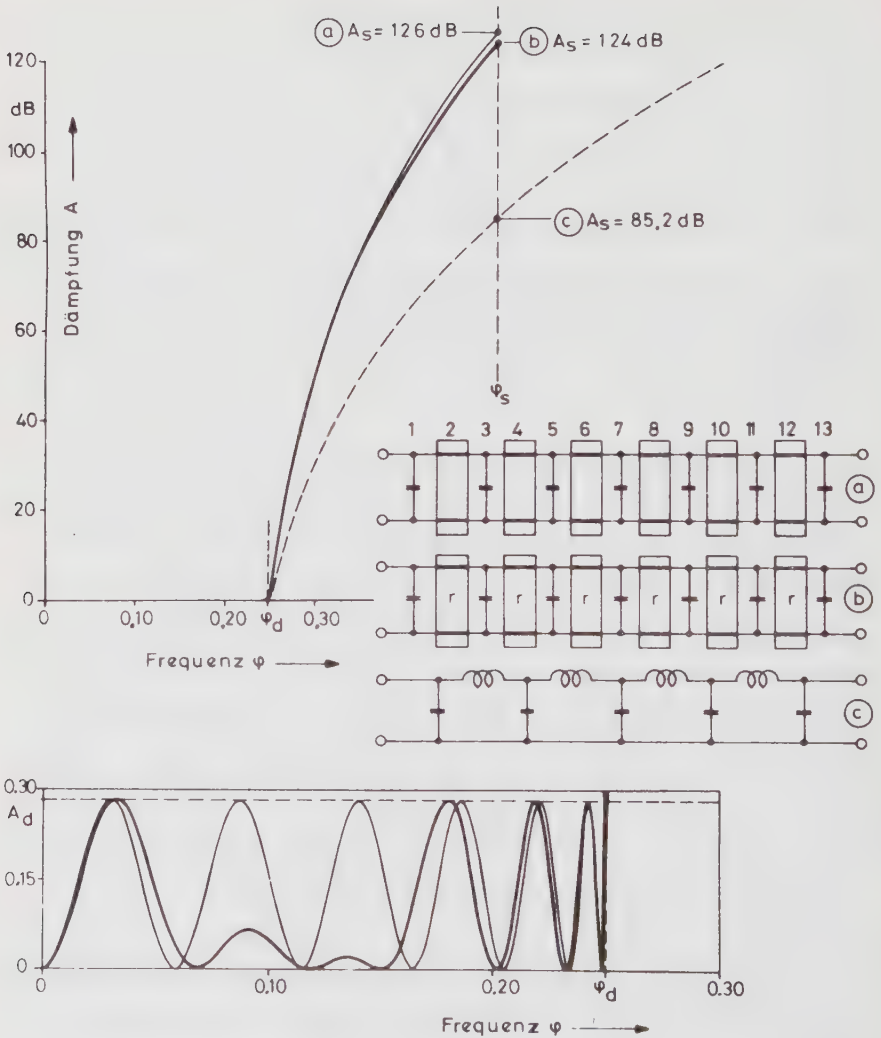


Bild 4.15 Dämpfungsverlauf von Filter 1A mit $\psi_d = 0.25$, $\psi_s = 0.5$ und $A_d = 0.28$ dB ($\rho = 25\%$)

- (a) Gleichripliges Filter ohne Nebenbedingungen mit $n = 13$, $M = 13$
- (b) Optimiertes Filter mit $M = 9$
- (c) Zum Vergleich, gleichripliges Filter mit $n = 9$, $M = 9$

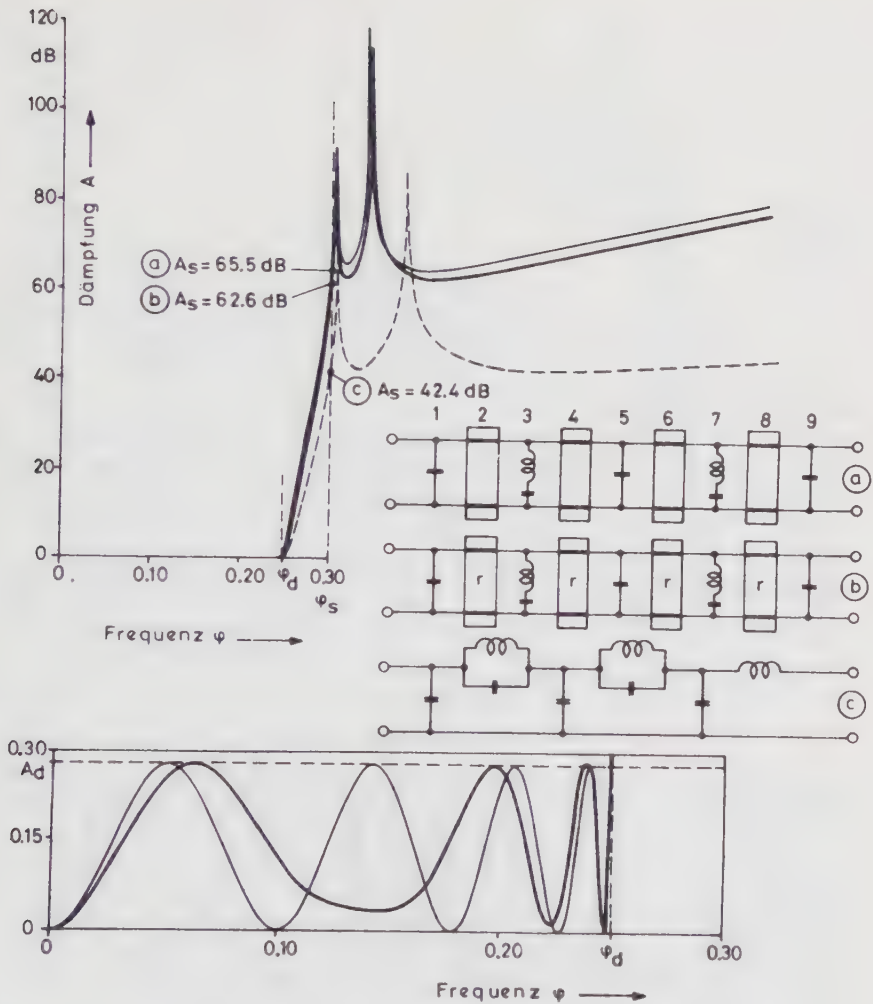


Bild 4.16 Dämpfungsverlauf von Filter 2A mit $\psi_d = 0.25$, $\psi_s = 0.30$, und $A_d = 0.28$ dB ($\rho = 25\%$)

- (a) Gleichrippiges Filter ohne Nebenbedingungen mit $n=9$, $M=12$
- (b) Optimiertes Filter mit $M=9$
- (c) Zum Vergleich, gleichrippiges Filter, mit $n=6$, $M=9$ (Abschlußwiderstand $R_2 \neq R_1$)

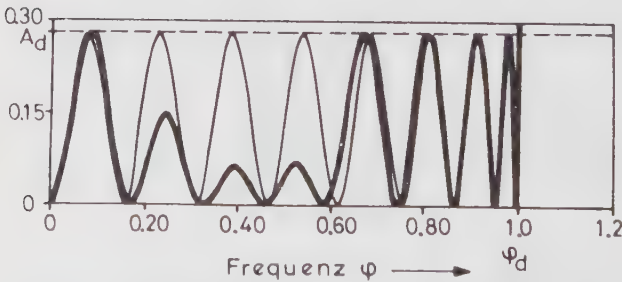
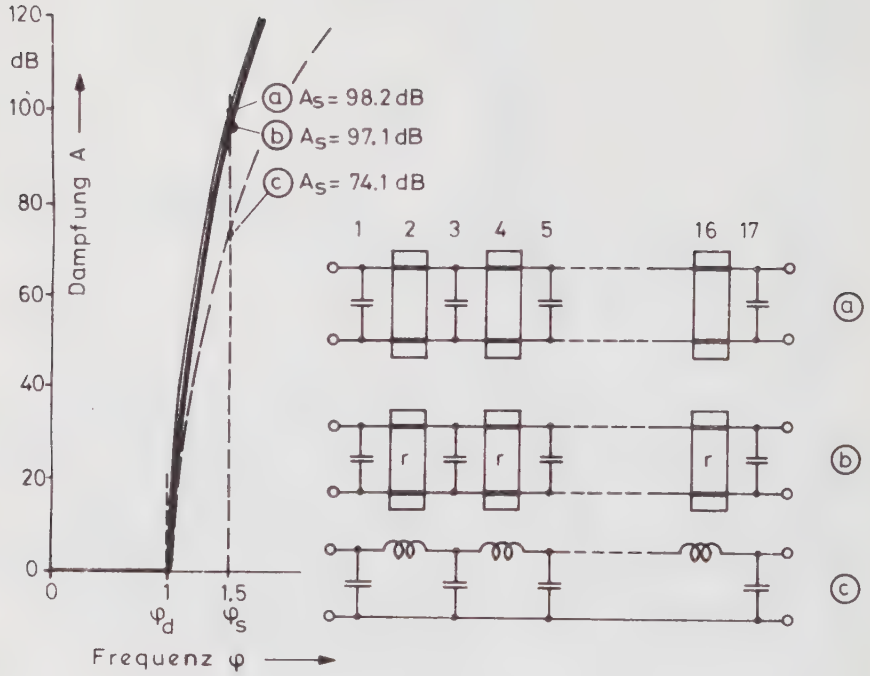


Bild 4.17 Dämpfungsverlauf von Filter 3A mit $\varphi_d = 1$, $\varphi_s = 1.5$, $A_d = 0.28 \text{ dB}$ ($\rho = 25\%$)

- (a) Gleichrippiges Filter ohne Nebenbedingungen mit $n=17$, $M=17$
- (b) Optimiertes Filter mit $M=11$
- (c) zum Vergleich, gleichrippiges Filter mit $n=11$, $M=11$

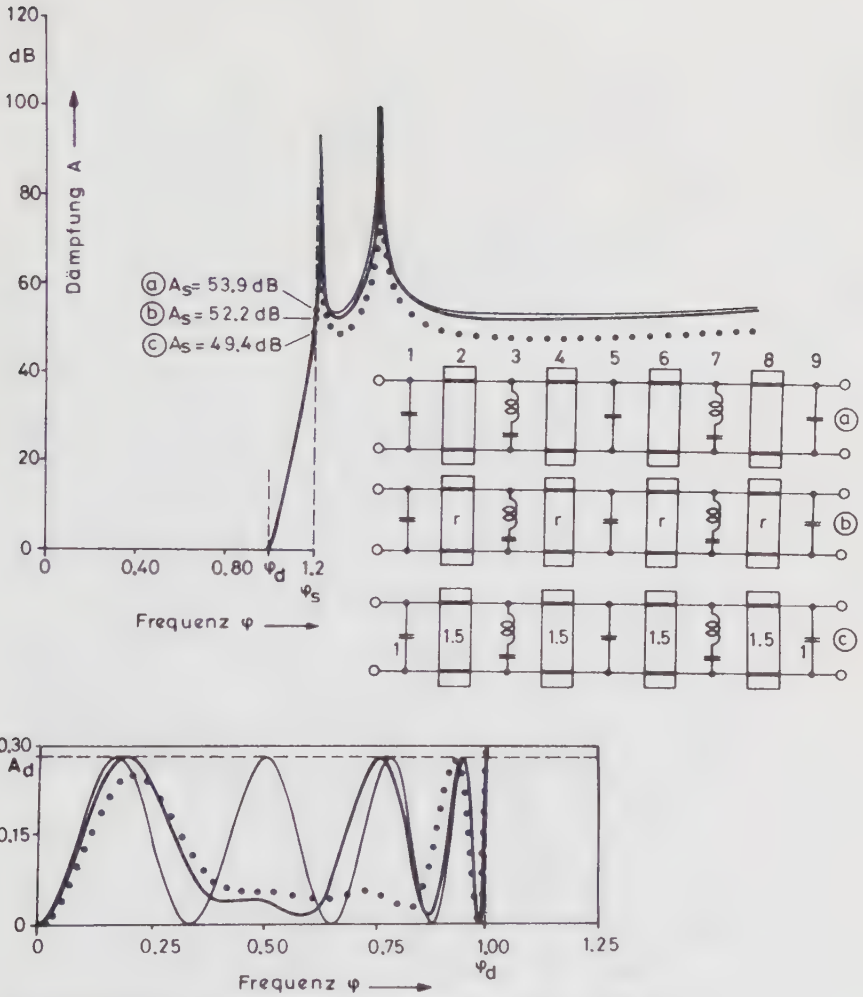


Bild 4.18 Dämpfungsverlauf von Filter 4 A mit $\psi_d = 1$, $\psi_s = 1.2$ und $A_d = 0.28$ dB ($\rho = 25\%$)

- (a) Gleichripliges Filter ohne Nebenbedingungen mit $n = 9$, $M = 12$
- (b) Optimiertes Filter mit $M = 9$
- (c) Optimiertes Filter mit $M = 5$, $r = 1.5$, $c_1 = c_9 = 1$

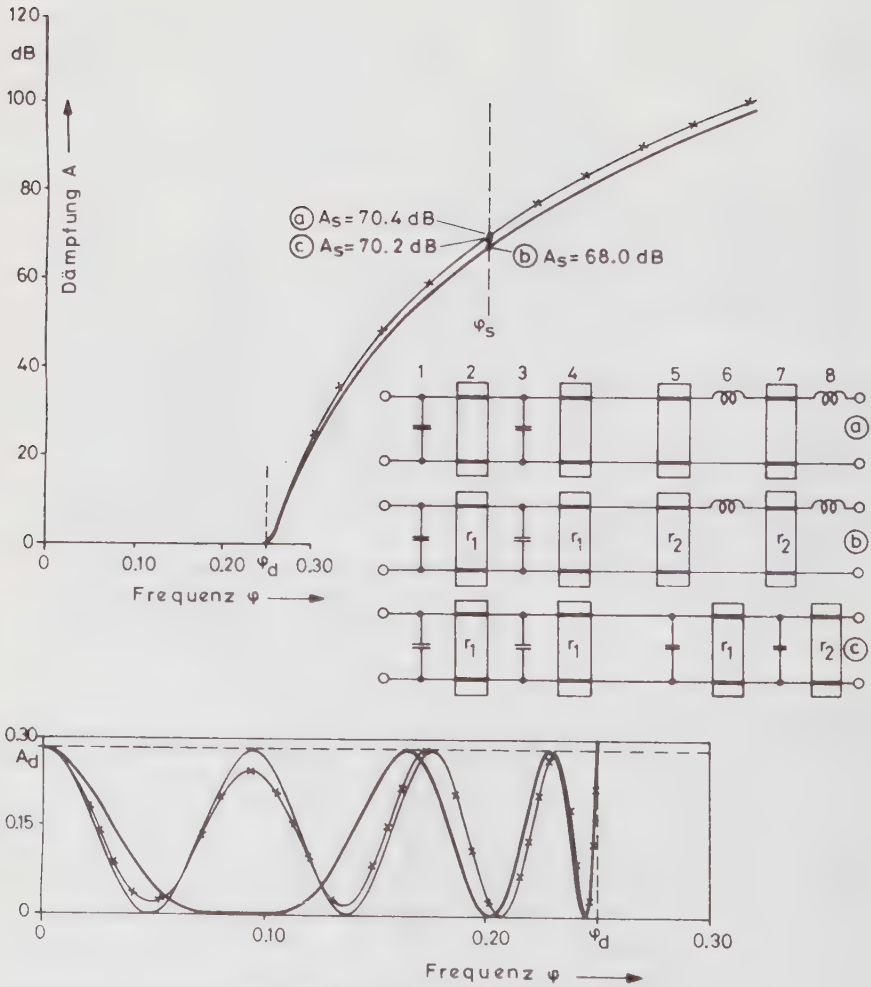


Bild 4.19 Dämpfungsverlauf von Filter 5A mit $\psi_d = 0.25$, $\psi_S = 0.5$ und $A_d = 0.28$ dB ($\rho = 25\%$)

(a) Gleichrippiges Filter ohne Nebenbedingungen mit $n = 8$, $M = 9$

(b) Optimiertes Filter mit $M = 7$

(c) Optimiertes Filter anderer Struktur mit $M = 7$

Abschlußwiderstände $R_2 = 0.6R_1$

Element Filter	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1A (b)	5.236	6.014	9.239	6.014	10.42	6.014	10.24 ▶	6.014	•••	(sym.)
2A (b)	4.712	4.661	l: 2.441 c: 4.441	4.661	10.86	4.661	l: 1.337 c: 6.273	4.661	4.918	
3A (b)	1.360	1.824	2.281	1.824	2.553	1.824	2.546	1.824	2.595 ▶	1.824 ••• (sym.)
4A (b)	1.128	1.494	l: 0.6274 c: 10.70	1.494	2.446	1.494	l: 0.2680 c: 1.696	1.494	1.256	
4A (c)	1.000	1.500	l: 0.6422 c: 1.045	1.500	2.370	1.500	l: 0.2669 c: 1.688	1.500	1.000	
5A (b)	4.924	6.272	8.370	6.272	0.09566	5.022	0.09566	2.954		
5A (c)	5.967	5.434	10.03	5.434	10.89	5.434	9.302	3.549		

Tab.1 Elementwerte r, l, c, der optimierten Filter 1A - 5A

4.5.2 Filter allgemeiner Struktur

Die Optimierung erfolgt mit α Parametern. Die numerischen Eigenschaften entsprechen den in Kap. 4.5.1 für Filter mit entkoppelnden Einheitsselementen angegebenen. In diesem Kapitel soll auch die weitere Optimierung von Filtern mit entkoppelnden Einheitsselementen betrachtet werden. In Bild 4.20 ist ein Filter angegeben, das im ersten Schritt (b) entsprechend Kapitel 4.5.1 optimiert worden ist; (c) ist das Ergebnis nach zwei Schritten der sequentiell stetigen Optimierung entsprechend Kapitel 4.3.1. Die Dämpfungspole des Filters mit echter Abzweigstruktur in Bild 4.21 wurden aus einer diskreten Menge von Frequenzen ausgewählt, so daß die entsprechenden Multiplizierer durch Skalierer 2^{-i} ersetzt werden konnten [66,69]. Dieses Filter wurde ebenfalls nach dem in Kap. 4.3.1 beschriebenen Verfahren optimiert; das Ergebnis (e) wurde nach drei Schritten erreicht. Auch bei diesen Beispielen sind die Dämpfungen im Sperrbereich noch fast so hoch wie bei den entsprechenden gleichrippigen Filtern ohne Nebenbedingungen. Wie die Ergebnisse zeigen, sind die Zwischenlösungen noch teilweise gleichrippig. Es ist an dieser Stelle zu betonen, daß die Auswahl der sequentiellen Schritte nicht eindeutig ist. Der Wertebereich der Skalierer wurde auf 2^{-1} bis 2^{-6} beschränkt. Die Ergebnisse können als Startwerte für eine evtl. nachfolgende diskrete Optimierung herangezogen werden [69]. Das Ergebnis für Filter 1B (Bild 4.20) ist identisch mit dem Ergebnis einer diskreten Optimierung [69]. Die Multiplizierer-Koeffizienten sind in Tabelle 2 angegeben.

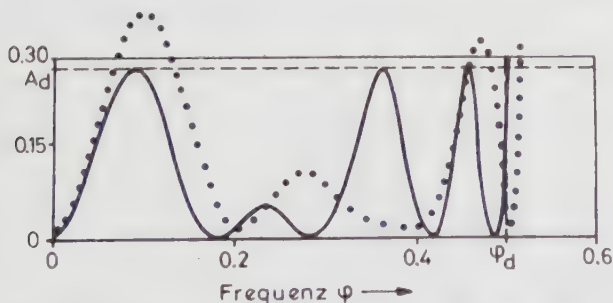
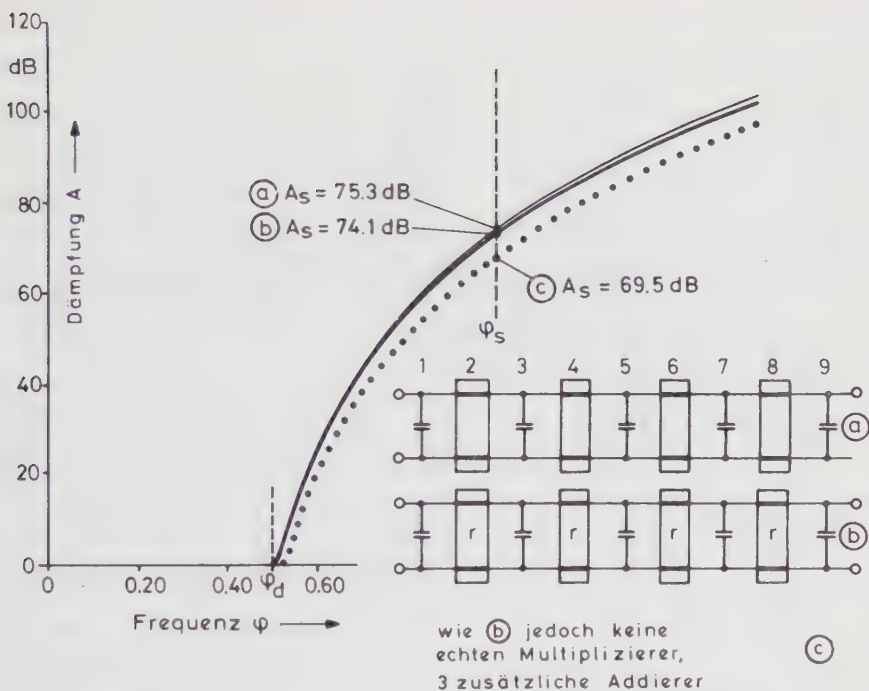


Bild 4.20 Dämpfungsverlauf von Filter 1 B mit $\psi_D = 0.5$, $\psi_S = 1$ und $A_D = 0.28 \text{ dB}$ ($p = 25\%$)

- (a) Gleichrippiges Filter ohne Nebenbedingungen mit $n = 9$, $M = 9$
- (b) Optimiertes Filter, $M = 7$
- (c) Optimiertes Filter ohne echte Multiplizierer ($A_d = 0.38 \text{ dB}$)

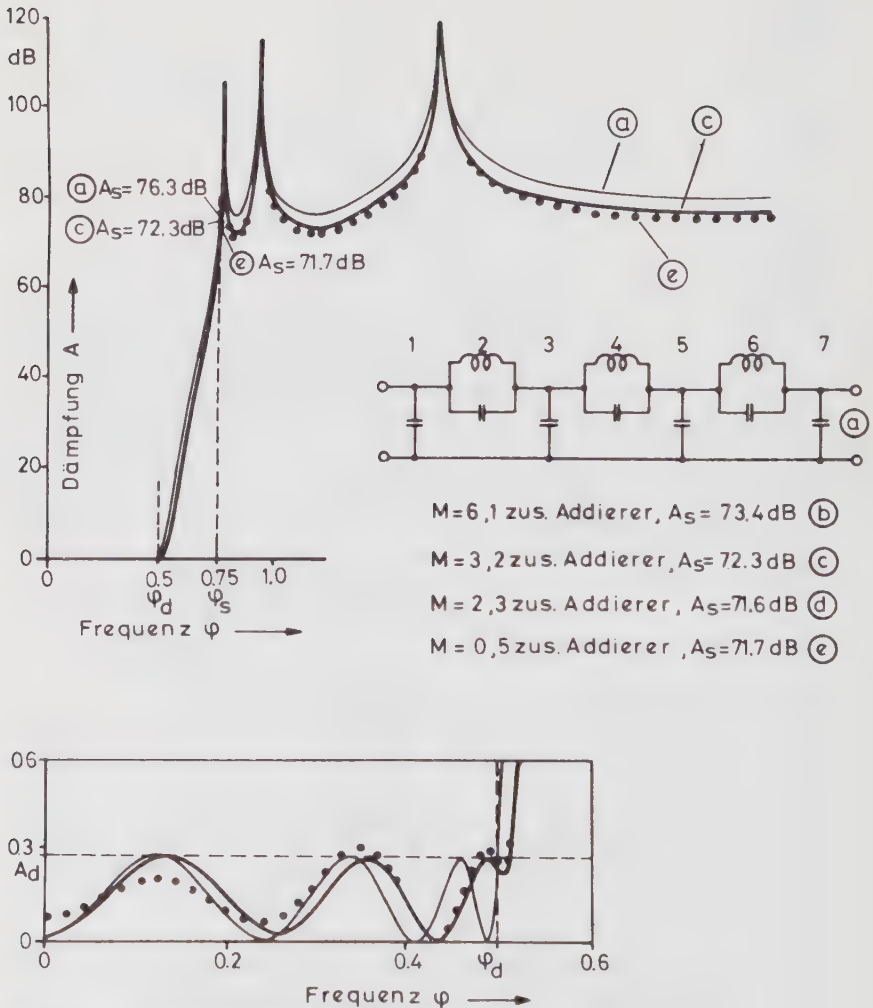


Bild 4.21 Dämpfungsverlauf von Filter 2B mit $\phi_D = 0.5$, $\phi_S = 0.75$ und $A_D = 0.28 \text{ dB}$ ($\rho = 25\%$)

- ① Gleichrippiges Filter, die Dämpfungspolfrequenzen entsprechen Multiplizier-Koeffizienten 2^{-1} mit $n=7, M=8$
- ②, ③, ④ Sequentielle Optimierungsschritte, $M=6, 3, 2$
- ⑤ Optimiertes Filter ohne echte Multiplizierer ($A_D = 0.31 \text{ dB}$)

	Element a_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Filter 1B ©	a_1	2^{-1}	-	2^{-3}	-	2^{-3}	-	2^{-3}	-	$2^{-2} \cdot 2^{-4}$
	a_2	$2^2 \cdot 2^{-4}$	-	2^{-3}	-	2^{-3}	-	2^{-3}	-	$2^{-1} \cdot 2^{-4}$
Filter 2B ©	a_1	$2^2 + 2^{-4}$	2^{-3}	$2^{-3} \cdot 2^{-6}$	$2^{-1} \cdot 2^{-3}$	1	1	1		
	a_2	1	1	1	$2^{-1} \cdot 2^{-3}$	$2^2 \cdot 2^{-4}$	2^{-2}	$2^{-2} + 2^{-5}$		
	a	-	2^{-1}	-	-2^{-2}	-	-2^{-4}	-		

Tab. 2 Multiplizierer - Koeffizienten der optimierten
Filter 1B + 2B

4.5.3 Tiefpaß-Bandpaß-Transformation

Bei klassischen verlustfreien Filtern kann man Bandpaßfilter mit Hilfe einer Reaktanztransformation [28] aus Tiefpaßfiltern entwickeln. In ähnlicher Weise erhält man bei Digitalfiltern Bandpaßfilter aus Tiefpaßfiltern mittels einer Allpaßtransformation [4]. Ein wichtiger Sonderfall ist durch die Transformation

$$z' = -z^2 \quad (4.53)$$

bzw.

$$\psi' = \frac{1}{2} \left(\psi + \frac{1}{\psi} \right) \quad (4.54)$$

gegeben; d. h., jedes Element des Digitalfilters mit der Verzögerung T wird durch ein Element mit der Verzögerung $2T$ und einem Inverter ersetzt. Ein optimiertes Tiefpaßfilter n -ten Grades nach Kap. 4.5.1 oder 4.5.2 kann so in ein Bandpaßfilter $2n$ -ten Grades mit der Mittenfrequenz bei $\varphi = 1$, d. h. bei $f = 1/4T$, transformiert werden, ohne daß sich die Zahl der Multiplizierer erhöht. Ein Beispiel hierfür ist in Bild 4.22 angegeben. Die Struktur des dazugehörigen Hilfstiefpaßfilters entspricht der von Filter 2A (Bild 4.16), jedoch mit nur einem Serienschwingkreis in der Mitte des Filters. Die Werte der Bauelemente des optimierten Hilfstiefpaßfilters sind:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_9 = 10.451 \\ r_2 &= r_4 = r_6 = r_8 = 1.588 \\ c_3 &= c_7 = 20.33 \\ l_5 &= 3.268 \\ c_5 &= 15.01 \end{aligned}$$

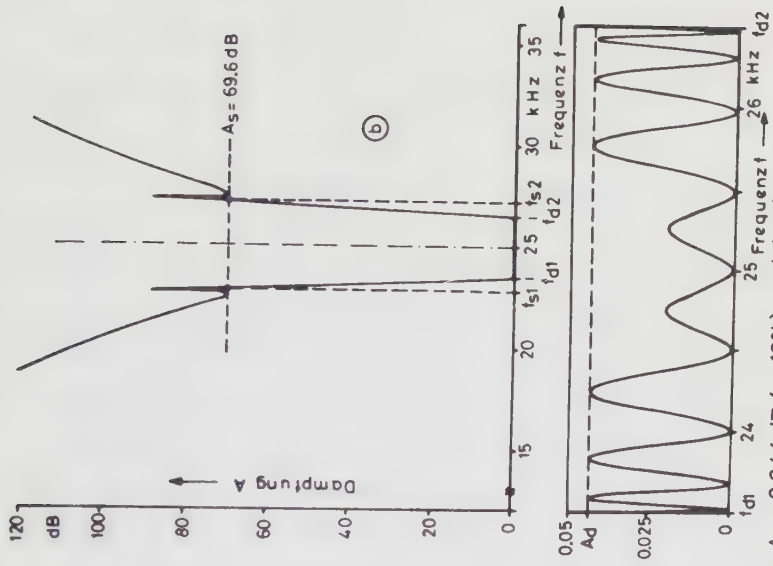
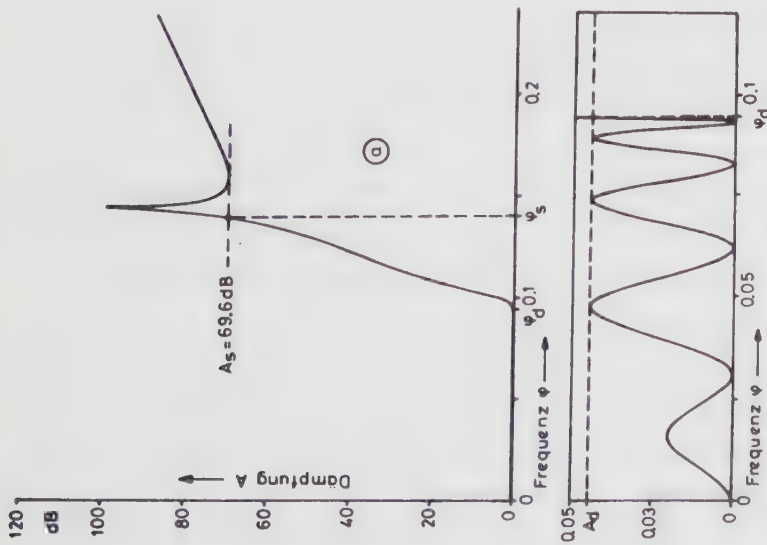


Bild 4.22 Dämpfungverlauf von Filter 1C mit $A_d = 0.044$ dB ($p = 10\%$) und $A_S = 69.6$ dB

Ⓐ Optimisiertes Hilfstiefpaßfilter mit $\psi_d = 0.09453$, $\psi_s = 0.13912$, $n = 9$, $M = 8$

Ⓑ Aus Ⓐ transformiertes Bandpaßfilter mit $f_{d1} = 23.5$, $f_{d2} = 26.5$, $f_{s1} = 22.8$, $f_{s2} = 27.2$, $n = 18$, $M = 8$.

5. Zusammenfassung

Aus wirtschaftlichen Gründen und im Hinblick auf die maximal erreichbare Taktfrequenz ist man bei Digitalfiltern daran interessiert, die Zahl der Multiplizierer bzw. den Multipliziereraufwand (Koeffizientenwortlänge bzw. Zahl der Addierer) gering zu halten. Bei Wellendigitalfiltern, deren Strukturen von Referenzfiltern mit resistiv abgeschlossenen Abzweigschaltungen abgeleitet werden, läßt sich die geringe Empfindlichkeit der Abzweigschaltungen gegenüber Bauelementetoleranzen und die daraus folgende geringe Empfindlichkeit gegenüber Variationen der Multiplizierer-Koeffizienten zur Optimierung von Filtern mit verringerter Zahl an Multiplizierern bzw. mit verringertem Multipliziereraufwand ausnutzen. Es wird gezeigt, daß die hierdurch gegebenen Möglichkeiten nicht auf Wellendigitalfilter mit bestimmtem Grad der Übertragungsfunktion oder auf wenige Strukturen beschränkt sind. Das Verfahren erfordert die Entwicklung von besonderen für Digitalrechner geeigneten Approximations- und Optimierungstechniken.

Ausgangspunkt sind Filter mit Tschebyscheff-Approximation der Dämpfung Null im Durchlaßbereich. Hierfür werden neuartige, leicht programmierbare Rekursionsformeln für verschiedene Filtertypen entwickelt. Diese Rekursionsformeln sind außer für klassische LC-Filter auch für Einheitselementfilter anwendbar. Für die gleichzeitige Tschebyscheff-Approximation der Dämpfung Null im Durchlaßbereich und der Dämpfung Unendlich im Sperrbereich wird bei Tiefpaßfiltern ein sukzessives Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung verwendet. Hierzu wird ein spezielles Verfahren zur näherungsweise Tschebyscheff-Approximation der Null bei

rationalen Funktionen mit festen Nullstellen abgeleitet. Reicht für die Filterapproximation und Filterberechnung die Genauigkeit bei der Koeffizientendarstellung der zugrundeliegenden Polynome nicht mehr aus, so wird die Produktdarstellung benutzt.

Aus den so approximierten und berechneten Filtern mit voller Zahl von Freiheitsgraden werden mit Hilfe eines geeigneten Optimierungsverfahrens Wellendigitalfilter mit verringertem Multipliziereraufwand, d. h. mit verringerter Zahl von Freiheitsgraden entwickelt. Dieses Optimierungsverfahren wird zunächst für Wellendigitalfilter mit entkoppelnden Einheitselementen hergeleitet und an Hand von Beispielen geprüft. Es läßt sich erweitern und verallgemeinern, so daß es u. a. auch für Wellendigitalfilter allgemeiner Struktur anwendbar ist; auch hierfür werden Beispiele gegeben. Im Hinblick auf genaue Optimierung und geringe Rechenzeiten wird ein neues Verfahren zur Berechnung der Empfindlichkeit gegenüber Änderungen der Multiplizierer-Koeffizienten abgeleitet. Die Anwendung eines allgemeinen Minimierungsverfahrens zur Optimierung setzt die Aufstellung einer geeigneten Zielfunktion voraus, da die Optimierung stark nichtlinear ist.

Da die Approximation, Berechnung und Optimierung von solchen Filtern durch einen beträchtlichen Rechenaufwand gekennzeichnet ist, wird bei der Auswahl der Verfahren besonderer Wert auf geringe Rechenzeiten gelegt. Dieser Gesichtspunkt war auch bei der Entwicklung der verschiedenen Rechnerprogramme entscheidend. Wegen der Vielzahl der möglichen Strukturen von Wellendigitalfiltern wird bei der Optimierung ein systematischer Aufbau aus Elementarzellen zugrunde gelegt. Die Berechnungen wurden weit-

gehend in der problemorientierten Programmiersprache ALGOL 60 auf einem TR 440 Rechner durchgeführt.

Die Ergebnisse dieser Arbeit haben nicht nur für Digitalfilter Bedeutung, sondern sie können auch Anwendung finden bei analog zu Wellendigitalfiltern abgeleiteten RC-aktiven Filtern [65]. Die Verfahren zur Approximation und Berechnung von Filtern können sofort für Mikrowellenfilter verwendet werden. Das Optimierungsverfahren kann für Mikrowellenfilter modifiziert werden, so daß z. B. die für die Realisierbarkeit wichtigen Nebenbedingungen (Einschränkung der Impedanzparameter auf einen kleinen Bereich) berücksichtigt werden können.

Die Rechnerprogramme zur Filterberechnung, -approximation und -optimierung sind in benutzbarer Form vorhanden und können gegebenenfalls zur Verfügung gestellt werden.

Literaturverzeichnis

1. J. F. Kaiser, Digital filters, veröffentlicht in: F. F. Kuo und J. F. Kaiser, System analysis by digital computer, J. Wiley & Sons, S. 218-285, New York, 1966.
2. Special issue on digital filters, IEEE Trans. Audio Electro-acoust., vol. AU-16, September 1968.
3. B. Gold und C. M. Rader, Digital processing of signals, McGraw-Hill, New York, 1969.
4. H. W. Schübler, Digitale Systeme zur Signalverarbeitung, Springer Verlag, Berlin, 1973.
5. A. V. Oppenheim und R. W. Schaffer, Digital signal processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
6. L. R. Rabiner und B. Gold, Theory and application of digital signal processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
7. A. Fettweis, Entwurf von Digitalfiltern in Anlehnung an Verfahren der klassischen Netzwerktheorie, NTZ-Report, NTG-Fachtagung Analyse und Synthese von Netzwerken, S. 17-20. Stuttgart, September 1970.
8. J. A. C. Bingham, A new type of digital filters with a reciprocal ladder configuration, Proc. IEEE Int. Symp. Circuit Theory, S. 129-130, Atlanta, Dezember 1970.
9. A. Fettweis, Digital filter structures related to classical filter networks, Arch. Elektr. Übertrag., vol. 25, S. 79-89, Februar 1971.
10. A. Fettweis, Some principles of designing digital filters imitating classical filter structures, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-18, S. 314-316, März 1971.
11. A. Fettweis, Wave digital filters, Proc. of the Tåle Summer

School on Circuit Theory, Institute of Radio Engineering and Electronics, Czechoslovak Academy of Science, S. 11-1 bis 11-10, Prag, 1971.

12. A. Fettweis, Pseudopassivity, sensitivity, and stability of wave digital filters, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-19, S. 668-673, November 1972.
13. A. Sedlmeyer und A. Fettweis, Digital filters with true ladder configuration, Int. J. Circuit Theory and Applications, vol. 1, S. 5-10, März 1973.
14. A. Fettweis, H. Levin und A. Sedlmeyer, Wave digital lattice filters, Int. J. Circuit Theory and Applications, vol. 2, S. 203-211, Juni 1974.
15. A. Fettweis, Wave digital filters with reduced number of delays, Int. J. Circuit Theory and Applications, vol. 2, S. 319-330, Dezember 1974.
16. A. Fettweis, Some results in wave digital filter theory, Proc. Fifth Colloquium on Microwave Communication, vol. 2, S. CT-101 bis 110, Budapest, Juni 1974.
17. A. Sedlmeyer, Structures for wave digital filters and their real time realization on a minicomputer, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Juli 1974.
18. A. Fettweis, On sensitivity and roundoff noise in wave digital filters, IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-22, S. 383-384, Oktober 1974.
19. A. Fettweis und K. Meerkötter, Suppression of parasitic oscillations in wave digital filters, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-22, S. 239-246, März 1975.
20. T. A. C. M. Claasen, W. F. G. Mecklenbräuker und J. H. B. Peek, On the stability of the forced response of digital filters

- with overflow nonlinearities, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-22, S. 692-696, August 1975.
21. A. Fettweis, Canonic realization of ladder wave digital filters, Int. J. Circuit Theory and Applications, vol. 3, S. 321-332, Dezember 1975.
 22. A. Fettweis und K. Meerkötter, On adaptors for wave digital filters, IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-23, S. 516-525, Dezember 1975.
 23. A. Fettweis und K. Meerkötter, Suppression of parasitic oscillations in half-synchronic wave digital filters, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-23, S. 125-126, Februar 1976.
 24. S. Bernstein und C. de La Vallée Poussin, L'Approximation, Paris 1926/1919, Nachdruck, Chelsea Publishing Company, New York, 1970.
 25. G. Meinardus, Approximationen von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer Verlag, Berlin, 1964.
 26. E. W. Cheney, Introduction to approximation theory, McGraw-Hill, New York, 1966.
 27. L. Collatz und W. Krabs, Approximationstheorie, B. G. Teubner, Stuttgart, 1973.
 28. W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Akademie Verlag, Berlin, 1954.
 29. V. Fetzter, Die numerische Berechnung von Filterschaltungen, Arch. Elektr. Übertrag., vol. 5, S. 499-508, 1951.
 30. V. Belevitch, Topics in the design of insertion loss filters, IRE Trans. Circuit Theory, vol. CT-2, S. 337-346, Dezember 1955.
 31. A. Fettweis, Recurrence formulae for the calculation of the characteristic function of filters with Tchebycheff pass-

- band behaviour, Revue HF, vol. 4, S. 1-10, Oktober 1960.
32. A. Fettweis, Explicit formulae for the calculation of the characteristic function of filters with Tchebycheff pass-band behaviour, Revue HF, vol. 4, S. 3-11, Dezember 1960.
33. M. C. Horton und R. J. Wenzel, Realization of microwave filters with equal ripple response in both pass and stop bands, Proc. Symp. Generalized Networks, S. 257-288, Polytechnic Institute of Brooklyn, April 1966.
34. H. J. Orchard und G. Temes, Filter design using transformed variables, IRE Trans. Circuit Theory, vol. CT-15, S. 385-408, Dezember 1968.
35. R. E. Crochiere, Digital ladder structures and coefficient sensitivity, IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-20, S. 240-246, Oktober 1972.
36. A. Chu und R. E. Crochiere, Comments and experimental results on optimal digital ladder structures, IEEE Trans. Audio Electroacoust., vol. AU-20, S. 317-318, Oktober 1972.
37. L. Fraiture und J. J. Neirynck, Optimum elliptic function filters for distributed constant systems, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-15, S. 482-483, August 1967.
38. E. Christian, Beiträge zur Netzwerksynthese mit Hilfe von Cauerschen und verallgemeinerten q-Funktionen, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Juli 1973.
39. S. Darlington, Synthesis of reactance 4-poles which produce prescribed insertion loss characteristics, Journal of Mathematics and Physics, S. 257-353, September 1939.
40. A. Fettweis, Cascade synthesis of lossless two-ports by transfer matrix factorization, veröff. in: Network theory (Proc. 1969 NATO Advanced Study Institute on Network Theory),

- herausg. von R. Boite, Gordon and Breach, New York, 1972.
41. L. Fraiture und J. J. Neirynek, Theory of unit-element filters, Revue HF, vol. 7, S. 325-340, Dezember 1969.
42. Advances in microwaves, Supplement 1, Microwave filters and circuits: Contributions from Japan (herausgeg. von A. Matsumoto), Academic Press, New York, 1970.
43. R. Levy, A general equivalent circuit transformation for distributed networks, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-12, S. 457-458, September 1965.
44. R. Saal, The design of filters using the catalogue of normalized low-pass filters, Telefunken AG, Backnang, 1966.
45. C. Norek, Product method for the calculation of the effective-loss L, C filters, Proc. Int. Symp. Network Theory, S. 353-365, University of Belgrade, September 1968.
46. J. P. Thiran, P. Van Bastelaer und C. Wellekens, Description of a filter synthesis and analysis program with a special study of the numerical accuracy, Revue MBLE, S. 39-58, Heft 2, 1970.
47. H. Okolowitz, Zur Synthese verlustfreier Zweitore durch Faktorisierung der Betriebsparametermatrizen, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Februar 1971.
48. G. Meinardus, Invarianz bei linearen Approximationen, Arch. f. Rat. Mech. und Anal., vol. 14, S. 301-303, 1963.
49. J. W. Bandler, Optimization methods for computer-aided design, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-17, S. 533-552, August 1969.
50. J. W. Bandler und R. E. Seviara, Current trends in networks

- optimization, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-18, S. 1159-1170, Dezember 1970.
51. J. W. Bandler und C. Charalambous, Theory of generalized least pth optimization of networks, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-19, S. 287-289, Mai 1972.
52. C. Charalambous, A unified review of optimization, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-22, S. 289-300, März 1974.
53. R. Fletcher und M. J. D. Powell, A rapidly convergent descent method for minimization, Comp. J., vol. 6, s. 163-168, Juni 1963.
54. M. Wells, Algorithm 251-Function minimization, Comm. ACM, vol. 8, S. 169-170, März 1965.
55. R. Fletcher, Certification of algorithm 251-Function minimization, Comm. ACM, vol. 9, S. 686-687, September 1966.
56. P. A. Hamilton und J. Boothroyd, Remark on algorithm 251-Function minimization, Comm. ACM, vol. 12, S. 512-513. September 1969.
57. F. R. House, Remark on algorithm 251-Function minimization, Comm. ACM, vol. 14, S. 358, Mai 1971.
58. S. W. Director und R. A. Rohrer, Automated network design - the frequency-domain case, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-16, S. 330-337, August 1969.
59. A. Fettweis, A general theorem for signal-flow networks, with applications, Arch. Elektr. Übertrag., vol. 25, S. 79-89, Dezember 1971.
60. A. Fettweis, Reciprocity, interreciprocity, and transposition in wave digital filters, Int. J. Circuit Theory and Applications, vol. 1, S. 323-337, Dezember 1973.
61. S. J. Mason und H. J. Zimmerman, Electronic Circuits, signals

- and systems, J. Wiley & Sons, New York, 1960.
62. A. Fettweis, Some general properties of signal-flow networks, veröff. in: Network and Signal Theory (herausg. von J. K. Skwirzynski und J.O. Scanlan), Peter Peregrinus, London, 1973.
 63. K. A. Owenier, Approximation von Wellendigitalfiltern mit reduziertem Multipliziereraufwand, Vortrag beim DFG-Kolloquium Digitale Systeme zur Signalverarbeitung, Erlangen, März 1974.
 64. K. A. Owenier, Ein allgemeines Verfahren zur Optimierung von Wellendigitalfiltern mit reduziertem Multipliziereraufwand, Vortrag beim DFG-Kolloquium Digitalfilter, Bochum, Oktober 1975.
 65. H. Wupper, Neuartige Realisierung RC-aktiver Filter mit geringer Empfindlichkeit, Habilitationsschrift, Ruhr-Universität Bochum, 1975.
 66. A. Fettweis, G. J. Mandeville und C-Y. Kao, Design of wave digital filters for communications applications, Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems, S. 162-165, Boston, 1975.
 67. J. P. Thiran, On unit element structures for wave digital filters, Proc. 1975 Florence Conference Digital Signal Processing, S. 124-131.
 68. K. A. Owenier, A general optimization procedure for wave digital filters with reduced number of multipliers, Proc. IEEE Int. Symp. Circuit Theory, S. 465-468, München 1976.
 69. W. Wegener, Design of wave digital filters with very short coefficient word length, Proc. IEEE Int. Symp. Circuit Theory, S. 473-476, München 1976.
 70. K. A. Owenier, Optimization of wave digital filters with reduced number of multipliers, Arch. Elektr. Übertrag., vol. 30, S. 387-393, Oktober 1976.
 71. U. Ullrich, Effektive Verfahren zur Ermittlung des Signal-

- rauschverhältnisses von Digitalfiltern unterschiedlicher Struktur, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1976.
72. J. P. Thiran, On unit element structures for wave digital filters, IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS-24, S. 20-28, January 1977.
73. J. Kudrewicz, Approximationstheorie, veröff. in: Mathematik Handbuch (herausg. von J. Dreszer), Verlag Harri Deutsch, Zürich, 1975.
74. R. Levy, Generalized rational function approximation in finite intervals using Zolotarev functions, IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-18, S. 1052-1064 Dezember 1970.
75. R. Levy, Characteristics and element values of equally terminated Achieser-Zolotarev quasi-low-pass filters, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-18, S. 538-544, September 1971.
76. A. Fettweis, Realizability of digital filter networks, Arch. Elektr. Übertrag., vol. 30, S. 90-96, Februar 1976.
77. K. Gêher, Theory of network tolerances, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1971.
78. J. L. Bordewijk, Inter-reciprocity applied to electrical networks, Appl. Sci. Res., vol. B6, S. 1-74, 1956.
79. A. Fettweis, Unveröffentlichte Untersuchungen aus der Zeit um 1960.
80. S. W. Director, LU Factorization in network sensitivity computations, IEEE Trans. Circuit Theory, vol. CT-18, S. 184-185, Januar 1971.

Anhang A1: Abschätzung von $1/R_{i,j}$ (S.61)

Aus (2.157) und der getroffenen Definition von $\sqrt{z}$ und $-\sqrt{z}$ folgt, daß

$$\left| \operatorname{ch} \varphi_i - \operatorname{sh} \varphi_i \right|_{p=p_{0j}} = \left| e^{-\varphi_i} \right|_{p=p_{0j}} = \frac{1}{R_{i,j}} \quad (\text{A1.1})$$

für alle p_i, p_{0j} aus der offenen rechten Halbebene und im Grenzfall auch auf der ω -Achse außerhalb des Intervalls

$[-1, 1]$ abzuschätzen ist. Für $p = -p_{0j}$ ändert auch $\sqrt{p_{0j}^2 + 1}$ das Vorzeichen, so daß sich für $R_{i,j}$ kein anderer Wert ergibt. Mit $\varphi_i = x + jy$ gilt

$$1/R_{i,j} = e^{-x} \quad , \quad (\text{A1.2})$$

d. h., $1/R_{i,j} < 1$ für $x > 0$. Aus (2.62) folgt

$$\operatorname{th} \varphi_i \Big|_{p=p_{0j}} = \frac{p_i \sqrt{p_{0j}^2 + 1}}{p_{0j} \sqrt{p_i^2 + 1}} = \frac{\operatorname{sh} 2x + j \sin 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y} \quad . \quad (\text{A1.3})$$

Da $\operatorname{ch} 2x + \cos 2y$ für alle p_i, p_{0j} aus dem betrachteten Bereich größer Null ist, folgt aus $x > 0$ auch $\operatorname{sh} 2x > 0$ sowie

$\operatorname{Re}\{\operatorname{th} \varphi_i \Big|_{p=p_{0j}}\} > 0$ und umgekehrt. Es ergibt sich mit

$$z_1 = \frac{p_i}{\sqrt{p_i^2 + 1}} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{\sqrt{p_{0j}^2 + 1}}{p_{0j}} \quad (\text{A1.4a,b})$$

$$\text{aus } \operatorname{Re}\{\operatorname{th} \varphi_i \Big|_{p=p_{0j}}\} = \operatorname{Re}\{z_1 \cdot z_2\} > 0 \quad (\text{A1.5})$$

die hinreichende Bedingung

$$|\arg(z_1)| \quad , \quad |\arg(z_2)| < \pi/4 \quad . \quad (\text{A1.6})$$

Die Bedingung (A1.6) ist nur für $\text{sgn}[\arg(z_1)] = \text{sgn}[\arg(z_2)]$, d. h. für $\text{sgn}(\{\text{Im}\{p_i\}\}) \neq \text{sgn}(\{\text{Im}\{p_{oj}\})$, von Bedeutung. Anderenfalls ist $\text{Re}\{\theta\varphi_i\}$ immer größer Null, da z_1 und z_2 mit (A1.4) beide auf die offene rechte Halbebene beschränkt sind.

Für imaginäre p_i , p_{oj} erhält man aus (A1.4) und (A1.5) im Grenzfall $p_i \rightarrow j\omega_i$ und $p_{oj} \rightarrow j\omega_{oj}$

$$\text{Re}\left\{ \frac{|\omega_i|}{\sqrt{\omega_i^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{\omega_{oj}^2 - 1}}{|\omega_{oj}|} \right\} > 0 \quad (\text{A1.7})$$

für ω_i , ω_{oj} außerhalb des Intervalls $[-1, 1]$. Entsprechend gilt für reelle p_i , $p_{oj} \neq 0$

$$\text{Re}\left\{ \frac{\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_{oj}^2 + 1}}{\sigma_{oj}} \right\} > 0 \quad , \quad (\text{A1.8})$$

da σ_i , $\sigma_{oj} > 0$ vorausgesetzt war. In diesen Fällen ist daher $1/R_{i,j}$ immer kleiner Eins. Entsprechendes gilt auch für Kombinationen ω_i , σ_{oj} bzw. ω_{oj} , σ_i .

Für allgemeine p_i , p_{oj} ist die Abschätzung etwas schwieriger. Aus (A1.4) und (A1.6) folgt die Grenzkurve

$$\frac{p^2}{p^2 + 1} = j\alpha \quad , \quad \alpha \text{ reell } \neq 0 \quad . \quad (\text{A1.9})$$

Mit $p = \sigma + j\omega$ ergibt sich

$$\sigma^2 - \omega^2 + j2\sigma\omega = j\alpha(\sigma^2 - \omega^2 + 1 + j2\sigma\omega)$$

bzw.:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^2 - \omega^2 &= -2\alpha\sigma\omega \\ 2\sigma\omega &= \alpha(\sigma^2 - \omega^2 + 1) \end{aligned} \right\} \quad . \quad (A1.10)$$

Eliminiert man α , so erhält man die Gleichung einer Lemniskate
(Spezialfall der Cassini'schen Kurven)

$$(\sigma^2 + \omega^2)^2 + \sigma^2 - \omega^2 = 0 \quad . \quad (A1.11)$$

In Bild A1.1 ist im nicht schraffierten Bereich der rechten Halbebene für p_i und p_{oj} die Bedingung (A1.6) erfüllt, d. h., $1/R_{i,j}$ immer kleiner Eins. Sind p_i und p_{oj} mit $\text{sgn}(\text{Im}\{p_i\}) \neq \text{sgn}(\text{Im}\{p_{oj}\})$ beide aus dem schraffierten Bereich, so gilt $1/R_{i,j} \geq 1$.

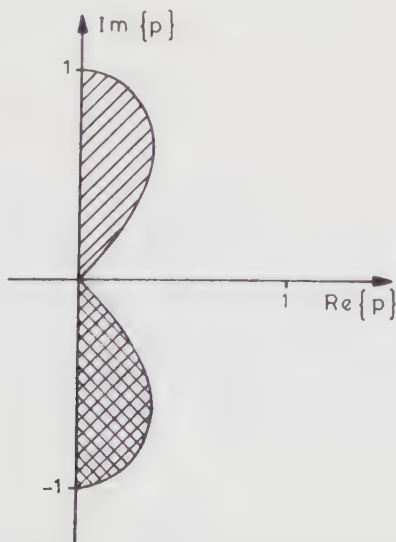


Bild A.1.1 Bereiche, in denen $1/R_{i,j} \geq 1$ sein kann
(schraffiert)

Für p_i, p_{oj} innerhalb des verbotenen Bereichs in Bild A1.1 kann man von der Tatsache Gebrauch machen, daß zu jedem komplexen p_i auch ein $p_k = p_i^*$ auftritt. Dann folgt mit (2.65) und (2.66)

$$\operatorname{th}(\varphi_i + \varphi_k) = c \frac{p \sqrt{p^2 + 1}}{(p^2 + \omega_0^2)}, \quad c > 0, \quad \omega_0^2 < 1. \quad (\text{A1.12})$$

Man kann zeigen, daß für p_{oj} aus der offenen rechten Halbebene gilt $\operatorname{Re} \operatorname{th}(\varphi_i + \varphi_k) \Big|_{p=p_{oj}} > 0$. Dies ergibt sich auch sofort aus der Eigenschaft, daß $p_{oj} \operatorname{th}(\varphi_i + \varphi_k)$ eine Q-Funktion ist; Q-Funktionen sind aber positive Funktionen, d. h. aus $\operatorname{Re}\{p\} > 0$ folgt $\operatorname{Re}\{Q\} > 0$ [28]. In diesen Fällen geht daher der Partialbruchanteil von $P/(NQ^2)$ (2.154) immerhin noch mit $q/R^{n/2}$ gegen Null, da dann die Ungleichung

$$\frac{1}{R_{i,j}} \cdot \frac{1}{R_{k,j}} = 1 - \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const.} > 0, \quad (\text{A1.13})$$

immer erfüllt ist.

Für den Beweis ist wichtig, daß ε für $n \rightarrow \infty$ nicht gegen Null strebt. Hierfür ist erforderlich, daß die p_i sich dem Intervall $[-1, 1]$ der ω -Achse auch für $n \rightarrow \infty$ nur bis auf einen, zwar sehr kleinen, jedoch konstanten Minimalabstand nähern dürfen. Durch diese Voraussetzung wird die Anwendbarkeit des Verfahrens praktisch nicht eingeschränkt.

Anhang A2: Berechnung von $Y_v Y'_v$ bzw. $Y Y'$ (S. 94)

Die Ableitung von (4.35) - (4.38) soll am Beispiel des n-Tor Paralleladaptors gezeigt werden. Das Eingangssignal Y_v des Multiplizierers mit dem Koeffizienten α_v läßt sich mit (4.30) und (2.7) aus den Spannungen und Strömen an den Toren v und n des dazugehörenden n-Tors des Referenzfilters berechnen. Es gilt mit

$$U_v = U \quad , \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (A2.1)$$

$$Y_v = A_v - A_n = U_v + R_v I_v - U_n - R_n I_n = R_v I_v - R_n I_n \quad . \quad (A2.2)$$

Das Eingangssignal Y'_v des nach der Transposition auftretenden Serienadaptors ergibt sich mit (4.31) und (4.34) nach dem Übergang auf Stromwellen ebenfalls aus den Spannungen und Strömen des die Parallelschaltung darstellenden n-Tors des Referenzfilters. Mit (A2.1) erhält man

$$\begin{aligned} Y'_v &= \frac{1}{\alpha_v} (A'_v - B'_v) = \frac{1}{\alpha_v} (I'_v + G_v U'_v - I'_v + G_v U'_v) = \\ &= \frac{1}{\alpha_v} 2G_v U'_v = \frac{1}{\alpha_v} 2G'_v U' \quad . \quad (A2.3) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich aus (A2.2 und A2.3) für die Empfindlichkeit des n-Tor Paralleladaptors folgendes Ergebnis:

$$Y_v Y'_v = (I_v / \alpha_v - \frac{G_v}{G_n} I_n / \alpha_v) U' \quad (A2.4)$$

bzw. mit (4.23)

$$Y_v Y'_v = (I_v / \alpha_v - I_n / \alpha_n) U' \quad . \quad (A2.5)$$

Herrn Prof. Dr. A. Fettweis bin ich für zahlreiche Anregungen und Diskussionen sowie für sein ständiges förderndes Interesse an dieser Arbeit zu großem Dank verpflichtet.

Lebenslauf

Ich wurde am 22. September 1940 in Wuppertal geboren. Nach vierjährigem Besuch der Volksschule besuchte ich von 1951 an die Realschule in Wuppertal-Barmen und erhielt dort 1957 das Abschlußzeugnis.

Nach einem zweijährigen Industriepraktikum begann ich im Wintersemester 1959/60 das Studium der Elektrotechnik (Fachrichtung Allgemeine Elektrotechnik) an der Staatlichen Ingenieurschule für Maschinenwesen in Wuppertal; dort legte ich 1962 die Ingenieurprüfung ab und wurde gleichzeitig zum Hochschulstudium empfohlen.

Von Oktober 1962 bis Oktober 1966 arbeitete ich in den Entwicklungsabteilungen der Firmen Rohde & Schwarz, München bzw. Vorwerk & Co., Wuppertal auf dem Gebiet der elektronischen Meßtechnik.

Im Wintersemester 1966 begann ich das Studium der Elektrotechnik (Fachrichtung Nachrichtentechnik) an der Technischen Hochschule in Aachen und legte dort im Sommersemester 1971 die Diplom-Hauptprüfung ab.

Seit Oktober 1971 bin ich Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Nachrichtentechnik an der Ruhr-Universität Bochum.

